

# DÉNOMBRABILITÉ POLYNOMIALE DES HYPERSURFACES DE GRAPHE

JIN FANGZHOU

Sous la direction de Francis Brown

RÉSUMÉ. A tout graphe on peut associer un polynôme lié aux arbres couvrants, et ainsi définir une variété qui a de l'importance en physique théorique. Dans ce mémoire on démontre le théorème de Belkale-Brosnan, selon lequel les classes de telles variétés sont assez génériques dans l'anneau de Grothendieck, contrairement à une conjecture antérieure de Kontsevich disant qu'une telle variété a toujours une fonction de comptage polynomiale.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction : une conjecture de Kontsevich	2
1.1. Énoncé de la conjecture	2
1.2. Reformulation de la conjecture	4
2. La géométrie algébrique liée à la théorie de graphes	6
2.1. Sur la théorie des graphes	6
2.2. Un peu de géométrie algébrique	9
2.3. Le module de tous les graphes	13
2.4. Les schémas déterminantaux	16
3. Interlude : Deux résultats de l'algèbre linéaire	20
3.1. Le théorème de Kirchhoff	20
3.2. Prolongements de formes bilinéaires symétriques	24
4. Les schémas d'incidence	26
4.1. Définitions et propriétés élémentaires	26
4.2. Formules de réduction	28
4.3. Relations entre $M(G)$ et les schémas $K_G(s)$ , $J_G(s)$ et $H_G(s)$	30
5. La théorie des matroïdes	34
5.1. Définitions et propriétés élémentaires	34
5.2. Lien avec la théorie de graphes	37
6. Le théorème d'universalité de Mnëv	39
6.1. Préliminaires	40
6.2. L'espace de configurations de quadruplets de points en position générale	41
6.3. Intersection de droites dans $\mathbb{P}^2$	41
6.4. Addition et multiplication projectives	42
6.5. Fin de la construction	44

---

Date: 3-10-2012.

7. Discussions et perspectives	46
7.1. Bilan	46
7.2. Sur la fonction de comptage	47
7.3. Motifs et périodes	48
Références	50

## 1. INTRODUCTION : UNE CONJECTURE DE KONTSEVICH

Dans ce mémoire on se propose d'étudier une conjecture de Kontsevich en 1997. Cette conjecture, qui a pour origine l'étude des amplitudes de Feynman en physique théorique, prédit la nature arithmétique d'une classe de variétés, appelées hypersurfaces de graphes, qui sont, comme le nom l'indique, définies à partir des graphes. Par conséquent, dans tout le mémoire on se place dans le cadre de géométrie algébrique, et on travaillera pas mal sur la théorie de graphes. Mais comme on le verra, l'étude en profondeur de cette conjecture a aussi recours à d'autres domaines de mathématiques tels que la théorie des matroïdes en combinatoire et l'algèbre linéaire des matrices. Le vrai contexte derrière cette conjecture est la théorie de motifs, dont la connaissance reste relativement limitée malgré de forts progrès récents.

### 1.1. Enoncé de la conjecture.

Dans un premier temps on donne les éléments nécessaires pour pouvoir énoncer la conjecture de Kontsevich.

**Notations 1.1.** Si  $E$  est un ensemble fini, on note  $\#E$  le cardinal de  $E$  et  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Si  $S$  est un sous-ensemble de  $E$ , on note  $E \setminus S$  le complémentaire de  $S$  dans  $E$ .

Si  $E$  est un ensemble et  $V$  est un ensemble fini, on note  $E^V$  l'ensemble  $E$  à la puissance  $V$ .

On note  $\mathcal{Q}$  l'ensemble des entiers naturels de la forme  $p^r$  où  $p$  est un nombre premier et  $r \in \mathbb{N}_+$ . Si  $q \in \mathcal{Q}$ , on note  $\mathbb{F}_q$  le corps fini de cardinal  $q$ .

L'objet essentiel en géométrie algébrique est les polynômes. La conjecture de Kontsevich fait intervenir de manière très importante le polynôme suivant, défini à partir des graphes :

**Définition 1.2.** Soit  $G$  un graphe fini. Pour toute arête  $e$  de  $G$ , notons  $x_e$  une variable formelle. On définit le polynôme  $P_G$  par la formule

$$P_G = \sum_T \prod_{e \notin T} x_e,$$

où la sommation porte sur l'ensemble des arbres couvrants de  $G$ .

Historiquement, le polynôme  $P_G$  apparut pour la première fois dans l'étude des circuits électriques dans le 19ième siècle, et porte le nom **polynôme de Kirchhoff**. On démontrera le célèbre théorème de Kirchhoff (voir la Section 3.1), selon lequel ce polynôme  $P_G$  est égal au déterminant d'une matrice symétrique.

Notons que si le graphe  $G$  n'est pas connexe, on a  $P_G = 0$  car il n'y a pas d'arbres couvrants ; dans le cas contraire  $P_G$  est un polynôme homogène de degré égal au premier nombre de Betti du graphe  $G$ .<sup>1</sup> On étudiera plus en détail la théorie des graphes dans la Section 2.1.

On définit  $V(P_G)$  comme le schéma des zéros de  $P_G$  sur  $\mathbb{Z}$ , qui est une hypersurface dans  $\mathbb{A}^E$ . On définit également  $Y_G = \mathbb{A}^E \setminus V(P_G)$  comme son complémentaire, qui est le lieu où le polynôme  $P_G$  ne s'annule pas.

Une autre notion qui intervient dans la conjecture de Kontsevich est la fonction de comptage d'un schéma et la dénombrabilité polynomiale :

**Définition 1.3.** Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $\mathbb{Z}$ . On note  $|X|$  la fonction  $\mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{N}$  définie par  $q \mapsto \#X(\mathbb{F}_q)$ . C'est la **fonction de comptage** du schéma  $X$ , qui compte les nombres de points de  $X$  sur les différents corps finis.

On dit qu'un schéma  $X$  est **polynomialement dénombrable** si  $|X|$  est une fonction polynomiale dans  $\mathbb{Z}[q]$ .<sup>2</sup>

Dans la littérature on trouve beaucoup de discussions sur la fonction de comptage, par exemple les célèbres conjectures de Weil. En général, un schéma est rarement polynomialement dénombrable, comme on en discutera dans la Section 7.2. Ce qu'affirme la conjecture de Kontsevich, c'est que les schémas  $Y_G$  appartiennent toujours à cette petite classe des schémas polynomialement dénombrables :

**Conjecture 1.4** (Kontsevich). Pour tout graphe  $G$ , le schéma  $Y_G$  est polynomialement dénombrable.

**Exemple 1.5.** Si le graphe  $G$  est un cycle de longueur  $n$ , alors  $P_G = \sum_{e \in G} x_e$ , donc  $V(P_G)$  est un hyperplan dans  $\mathbb{A}^n$  isomorphe à  $\mathbb{A}^{n-1}$ . On a alors  $|Y_G| = q^n - q^{n-1}$  est polynomiale.

On sait que  $|Y_G| + |V(P_G)| = |\mathbb{A}^E| = q^{\#E}$ . Donc de façon équivalente, cette conjecture affirme que tous les  $V(P_G)$  sont polynomialement dénombrables.

Cette conjecture est vérifiée pour un certain nombre de graphes : par exemple, dans [Stembridge] on vérifie qu'elle est vraie pour tous les graphes avec moins de 12 arêtes. Cependant, dans ce mémoire on démontrera qu'elle est totalement fautive, en suivant [Belkale-Brosnan2] : on montre que la fonction de comptage des schémas  $Y_G$  sont assez génériques, dans le sens qu'on va expliquer maintenant.

Afin de travailler avec les fonctions de comptage, on se place d'abord dans le cadre de motifs combinatoires suivant :

1. Chez différents auteurs on a d'autres conventions possibles, par exemple pour un graphe  $G$  non connexe en regardant le produit des  $P_{G'}$  où  $G'$  parcourt l'ensemble des composantes connexes de  $G$ . Quoiqu'il en soit cela change peu notre intérêt principal car on peut facilement se ramener aux graphes connexes simples.

2. Stanley déduit des conjectures de Weil le fait suivant : une fonction de la forme  $|X|$  est dans  $\mathbb{Q}[q]$  si et seulement si elle est dans  $\mathbb{Z}[q]$ , et donc on ne distingue pas  $\mathbb{Q}[q]$  et  $\mathbb{Z}[q]$  ici. Voir [Stanley2], Proposition 2.2.

**Définition 1.6.** On définit  $\mathbf{R}$  comme la localisation de l'anneau  $\mathbb{Z}[q]$  par rapport aux éléments  $q$  et les  $q^k - 1$ ,  $k \geq 1$ .<sup>3</sup> On définit  $\mathbf{S}$  comme l'ensemble des éléments de  $\mathbf{R}$  de la forme  $q^{a_0}(q-1)^{a_1} \cdots (q^n-1)^{a_n}$ , avec  $a_i \in \mathbb{Z}$ , qui sont inversibles dans  $\mathbf{R}$ .

On définit  $\mathbf{CMot}$  comme le  $\mathbf{R}$ -module engendré par les fonctions de comptage  $|X|$ , où  $X$  parcourt les schémas de type fini sur  $\mathbb{Z}$ . Les éléments de  $\mathbf{CMot}$  sont des fonctions  $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ . C'est aussi une  $\mathbf{R}$ -algèbre, dont la multiplication est définie par le produit fibré  $|X| |Y| = |X \times Y|$  et dont  $|\text{Spec } \mathbb{Z}| = 1$  est l'unité. On l'appelle l'anneau des **motifs combinatoires**.

Dans  $\mathbf{CMot}$ , on définit  $\mathbf{CGraphs}$  comme le sous- $\mathbf{R}$ -module engendré par les fonctions de la forme  $|Y_G|$ .

Le but principal de ce mémoire est la démonstration du théorème suivant :

**Théorème 1.7** (Berkale-Brosnan). *On a l'égalité  $\mathbf{CGraphs} = \mathbf{CMot}$ .*

Autrement dit, pour tout schéma de type fini  $X$ , il existe des graphes  $G_1, \dots, G_N$  et  $\sigma_i \in \mathbf{R}$  tels que

$$|X| = \sum_{i=1}^N \sigma_i |Y_{G_i}|.$$

Il résulte alors du Théorème 1.7 que la Conjecture 1.4 de Kontsevich est fautive. En effet, si elle était vraie, toute fonction de comptage  $|X|$  serait une fraction rationnelle, et on en déduit qu'elle est polynomiale car elle est à valeurs dans  $\mathbb{Z}$ . Or le comportement d'une fonction de comptage peut être loin d'être polynomiale, avec des contre-exemples bien connus, dont on parlera plus tard dans la Section 7.2, d'où une contradiction.

Malheureusement cette égalité qualitative ne permet pas encore de trouver un graphe explicite qui est un contre-exemple. On discutera sur cet aspect dans la Section 7.1. Notons que d'après l'article plus récent [Brown-Schnetz], on sait établir un contre-exemple explicite par la théorie du  $c_2$ -invariant, dont la méthode est différente avec le Théorème 1.7.

## 1.2. Reformulation de la conjecture.

On esquisse maintenant les grandes étapes de la démonstration du Théorème 1.7. Dans les deux premières sections du Chapitre 2 on établit le cadre de géométrie algébrique et de théorie de graphes dans lequel on va travailler.

La première étape est de construire un sous-module  $\mathbf{CGraphs}_*$  dans  $\mathbf{CGraphs}$  et se ramener aux schémas de matrices, d'après les travaux de Stanley. On définit un polynôme  $Q_G$ , qui est dual à  $P_G$  :

**Définition 1.8.** *Soit  $G$  un graphe fini, dont l'ensemble des sommets est  $V = V(G)$  et l'ensemble des arêtes est  $E = E(G)$ . On définit le polynôme  $Q_G$  par la formule*

$$Q_G = \sum_T \prod_{x \in T} x_e,$$

où la sommation porte sur l'ensemble des arbres couvrant de  $G$ .

<sup>3</sup>. Inverser les éléments  $q$  et les  $q^n - 1$  c'est de rendre inversibles les fonctions de comptage des schémas  $GL_n$  (voir la Proposition 2.42 plus bas), ce qui est un choix naturel.

On définit également  $V(Q_G)$  comme le schéma des zéros de  $Q_G$  sur  $\mathbb{Z}$ , qui est une hypersurface dans  $\mathbb{A}^E$ , et  $X_G = \mathbb{A}^E - V(Q_G)$  son complémentaire.

D'une première vue, on a automatiquement la relation  $P_G(x) = Q_G(\frac{1}{x}) \prod_e x_e$ . Mais on ne sait pas dire plus sur le lien entre les schémas  $X_G$  et  $Y_G$ , ni sur leurs fonctions de comptage. Le point clé est de regarder le module engendré par la fonction de comptage de tous les graphes, au lieu de regarder un graphe particulier. On a la proposition suivante (voir la Section 2.3), qui relie le module de tous les  $|X_G|$  avec celui de tous les  $|Y_G|$  :

**Proposition 1.9.** *Le sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{CMot}$  engendré par les fonctions de la forme  $|X_G|$  est égal à  $\mathbf{CGraphs}$ .*

Donc au niveau du module de tous les graphes, regarder les  $|X_G|$  ou les  $|Y_G|$  c'est la même chose. Et alors la Conjecture 1.4 est équivalente à la conjecture suivante :

**Conjecture 1.10.** *Pour tout graphe  $G$ , le schéma  $X_G$  est polynomialement dénombrable.*

On peut alors travailler avec les  $X_G$  à la place des  $Y_G$ , sans perte de généralité. D'après la remarque de Stanley, on pourra s'intéresser à un autre type de schémas liés aux graphes simples : soit  $G$  un graphe simple dont l'ensemble des sommets est  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . On définit  $Z_G^0$  comme le schéma des  $n \times n$  matrices symétriques non dégénérées telles  $M_{ij} = 0$  dès que  $i \neq j$  et que  $v_i$  n'est pas connecté à  $v_j$ . Le lien entre les  $X_G$  et les  $Z_G^0$  est expliqué par le résultat suivant (voir la Section 3.1) :

**Proposition 1.11.** *Soit  $G$  un graphe simple. On note  $G^*$  le graphe obtenu en rajoutant un sommet à  $G$ , qui est connecté à tous les sommets de  $G$ . Alors on a un isomorphisme  $X_{G^*} \simeq Z_G^0$ .*

Donc si la Conjecture 1.10 était vraie, elle impliquerait la conjecture suivante sur la dénombrabilité polynomiale :

**Conjecture 1.12** (Stembridge). *Pour tout graphe simple  $G$ , le schéma  $Z_G^0$  est polynomialement dénombrable.*

Cette conjecture est vérifiée par exemple pour les complémentaires des forêts (voir [Belkale-Brosnan2], Corollary 11.2). Mais on montrera qu'elle est fautive aussi. Notons que lorsque le graphe  $G$  n'est pas connexe, les Conjectures 1.4 et 1.10 sont trivialement vraies, tandis que la Conjecture 1.12 ne l'est pas, car un graphe de la forme  $G^*$  est toujours connexe.

On ne va pas travailler directement avec les schémas  $Z_G^0$  : si  $G$  est un graphe simple, on va plutôt s'intéresser à  $G^0$ , complémentaire de  $G$ , à la place de  $G$ , en posant  $Z_G = Z_{G^0}^0$ . Explicitement, si l'ensemble des sommets de  $G$  est  $\{v_1, \dots, v_n\}$ , alors  $Z_G$  est le schéma qui représente les  $n \times n$  matrices symétriques non dégénérées telles  $M_{ij} = 0$  dès que  $i \neq j$  et que  $v_i$  est connecté à  $v_j$ . On considère le module engendré par les fonctions de comptage des schémas  $Z_G$  suivant :

**Définition 1.13.** *On définit  $\mathbf{CGraphs}_*$  comme le sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{CMot}$  engendré par les fonctions de la forme  $|Z_G|$  pour  $G$  graphe simple.*

D'après la Proposition 1.11, on a un isomorphisme  $Z_G \simeq X_{(G^0)^*}$ , et donc on a l'inclusion  $\mathbf{CGraphs}_* \subset \mathbf{CGraphs}$ . On a donc un sous-module de  $\mathbf{CGraphs}$  engendrés par les fonctions de comptage d'une famille de schémas de matrices.

Pour continuer on aura recours à la théorie des matroïdes : le matroïde est une notion combinatoire, qui généralise la notion de dépendance linéaire dans un espace vectoriel en algèbre linéaire. A tout matroïde on peut associer une famille de schémas de représentations de ce matroïde, et on définit  $\mathbf{CMatroids}$  comme le sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{CMot}$  engendré par les fonctions de comptage de ces schémas. L'intérêt de travailler avec ces objets est expliqué par le résultat suivant :

**Proposition 1.14.** *On a une inclusion  $\mathbf{CMatroids} \subset \mathbf{CGraphs}_*$ .*

Ce résultat est crucial dans la preuve du Théorème 1.7. Dans le Chapitre 4 on définit les schémas d'incidence, qui jouent un rôle d'intermédiaire entre les matroïdes et les schémas  $Z_G$ . Des deux côtés on se servira de deux types de récurrences différentes : d'une part par les propriétés combinatoires des matroïdes, et d'autre part par les opérations sur les graphes. On montre d'abord, par des méthodes de stratification, que les fonctions de comptage de ces schémas d'incidence sont combinaisons linéaires de celles des  $Z_G$ . Ensuite dans la Chapitre 5 on travaille sur l'aspect matroïdal, et montre que les classes de schémas de représentations des matroïdes sont engendrées par celles des schémas d'incidence dans  $\mathbf{CMot}$ .

En résumé, on obtient ainsi une suite d'emboîtements  $\mathbf{CMatroids} \subset \mathbf{CGraphs}_* \subset \mathbf{CGraphs} \subset \mathbf{CMot}$ . Mais par une méthode indépendante, on sait d'autre part que les schémas de représentations des matroïdes sont génériques dans  $\mathbf{CMot}$ , avec le théorème suivant :

**Théorème 1.15.** *On a l'égalité  $\mathbf{CMatroids} = \mathbf{CMot}$ .*

On verra sa démonstration dans le Chapitre 6, qui découle du théorème d'universalité de Mnëv. Avec le Théorème 1.15 on a ainsi démontré le Théorème 1.7, et enfin dans le Chapitre 7 on discutera sur quelques questions autour de la Conjecture de Kontsevich et du Théorème 1.7.

## 2. LA GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE LIÉE À LA THÉORIE DE GRAPHS

### 2.1. Sur la théorie des graphes.

Dans ce mémoire, un **graphe** est toujours fini, éventuellement avec des arêtes multiples. Si  $G$  est un graphe, on note toujours  $G = (V(G), E(G))$ , où  $V(G)$  est l'ensemble des sommets de  $G$  et  $E(G)$  est l'ensemble des arêtes de  $G$ . A priori les graphes sont non orientés, mais dans la démonstration du Théorème de Kirchhoff les orientations jouent un certain rôle.

On identifie les graphes avec leurs réalisations géométriques, ce qui permet de voir les graphes comme des complexes simpliciaux et de parler des nombres de Betti  $b_i(G)$  d'un graphe  $G$ .

Si  $G$  est un graphe, un **sous-graphe** de  $G$  est un graphe  $H$  tel que  $V(H) \subset V(G)$  et  $E(H) \subset E(G)$ .

Si  $G$  est un graphe et  $S \subset E(G)$ , on définit la **différence**  $G - S$  comme le graphe  $(V(G), E(G) \setminus S)$ . Si  $H$  est un sous-graphe de  $G$ , on note  $G - H = G - E(H)$ .

Une **boucle** est une arête dont les deux sommets coïncident. Un graphe **simple** est un graphe sans arête multiple et sans boucle. Un graphe **discret** est un graphe dont l'ensemble des arêtes est vide.

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes passant par ce sommet, compté avec multiplicités.<sup>4</sup> Une **feuille** est un sommet de degré 1. Un **apex** est un sommet qui relié à tous les autres sommets.

Si  $G = (V(G), E(G))$  et  $H = (V(H), E(H))$  sont deux graphes, la **réunion disjointe** de  $G$  et  $H$  est le graphe  $(V(G) \amalg V(H), E(G) \amalg E(H))$ .

**Remarque 2.1.** Via un lemme élémentaire, pour traiter les polynômes  $P_G$  et  $Q_G$ , on peut se restreindre aux graphes connexes simples dont tout sommet est de degré au moins 3 (voir par exemple [Brown-Schnetz], Lemma 16). Par ailleurs, les graphes susceptibles d'avoir une interprétation en physique sont étudiés par la théorie  $\phi^4$ , que l'on ne discute pas ici.

On introduit quelques opérations sur les graphes :

**Définition 2.2.** Soit  $G$  un graphe. On note  $G^*$  le graphe obtenu en y ajoutant un sommet à  $G$  et une arête reliant ce sommet avec chaque sommet de  $G$ , i.e. en ajoutant un apex à  $G$ .

On note  $DG$  le graphe obtenu en y ajoutant un nouveau sommet à  $G$  sans y ajouter d'arêtes.

Si  $G$  est un graphe simple à  $n$  sommets,  $G$  est contenu dans le graphe complet  $K_n$ . On note alors  $G^0 = K_n - G$  le **complémentaire** de  $G$ .

**Remarque 2.3.** Ces opérations vérifie les relations suivantes : si  $G$  est un graphe et  $S \subset E(G)$ , on a  $(G - S)^* = G^* - S$  ; si  $G$  est un graphe simple, on a  $(G^0)^* = (DG)^0$ .

On rappelle aussi la notion de cycles et d'arbres :

**Définition 2.4.** Un **cycle** de longueur  $n$  est un graphe  $C$  tel que  $V(C) = \{v_1, \dots, v_n\}$  et  $E(C) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$ . Si  $G$  est un graphe, un cycle de  $G$  est un sous-graphe de  $G$  qui est un cycle.

Une **forêt** est un graphe qui ne contient aucun cycle, i.e. si  $b_1(G) = 0$ . Un **arbre** est une forêt qui est connexe, i.e. si  $b_1(G) = 0$  et  $b_0(G) = 1$ . Une forêt est nécessairement un graphe simple, et ses composantes connexes sont des arbres.

Soit  $G$  un graphe. Une **forêt couvrante** de  $G$  est un sous-graphe  $H$  de  $G$  qui est une forêt et qui a les mêmes sommets que  $G$ . Une forêt couvrante de  $G$  est un arbre si et seulement si  $G$  est connexe, et dans ce cas on parle d'un **arbre couvrant** de  $G$ . Il est bien connu que tout graphe connexe possède un arbre couvrant.

On a le lemme suivant, qui caractérise les arbres par la relation entre le nombre de sommets et le nombre d'arêtes :

<sup>4</sup>. Par convention, en calculant le degré d'un sommet, on ne tient pas compte des boucles. Cette convention est cohérente avec le fait que les boucles ne contribuent pas aux arbres couvrants.

**Lemme 2.5.** *Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets et  $n - 1$  arêtes. Alors soit  $G$  contient un cycle, soit  $G$  est un arbre.*

*Démonstration.* D'après la formule d'Euler, on a l'égalité  $b_0(G) - b_1(G) = \chi(G) = \#V - \#E = 1$ .

Si le graphe  $G$  est connexe, on a  $b_0(G) = 1$  et donc  $b_1(G) = 0$ , i.e. le graphe  $G$  est un arbre.

Si le graphe  $G$  n'est pas connexe, on a de même  $b_0(G) > 1$  et donc  $b_1(G) > 0$ , i.e. le graphe  $G$  contient un cycle. □

**Lemme 2.6.** *Soient  $G$  un graphe connexe et  $S$  un sous-graphe de  $G$ . Alors  $S$  est contenu dans un arbre couvrant de  $G$  si et seulement si  $S$  est une forêt.*

*Démonstration.* Un sous-graphe d'un arbre est une forêt, ce qui montre le sens direct.

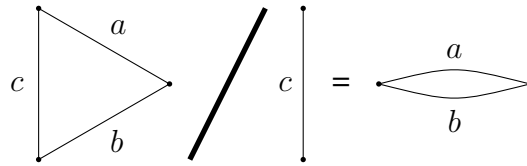
Réciproquement, supposons que  $S$  est une forêt. On peut supposer  $V(S) = V(G)$ , quitte à regarder le sous-graphe  $(V(G), E(S))$  de  $G$ , qui est une forêt et qui contient  $S$ .

Si  $S$  est connexe, c'est déjà un arbre couvrant de  $G$ , il n'y a rien à faire.

Si  $S$  n'est pas connexe, on va montrer qu'il existe une arête  $e$  dans  $G$  telle que le graphe  $S \cup \{e\}$  reste une forêt. En effet, soient  $A$  et  $B$  deux composantes connexes de  $S$ . Comme le graphe  $G$  est connexe, il existe un chemin d'arêtes dans  $G$  reliant  $A$  et  $B$ . Soit  $c$  un tel chemin de longueur minimale, et soit  $e$  la première arête (le premier pas) de  $c$  en partant de  $A$ . On vérifie facilement que l'arête  $e$  convient. Et alors en répétant ce procédé, on finit par tomber sur le cas  $S$  connexe, ce qui est déjà résolu. □

**Définition 2.7.** *Soit  $G$  un graphe et  $S$  un sous-graphe de  $G$ . On définit le **graphe quotient**  $G/S$  comme le graphe obtenu en identifiant dans  $G$  chaque composante connexe de  $S$  à un point.*

**Exemple 2.8.** Si on quotiente un triangle par l'une de ses arêtes, on obtient un graphe à deux sommets reliés par une double arête.



**Remarque 2.9.** 1) On peut aussi construire le quotient en contractant successivement toutes les arêtes de  $S$  dans  $G$ , et le résultat ne dépend pas de l'ordre des contractions. Donc le quotient se fait sur les arêtes et ne dépend pas l'ensemble des sommets de  $S$ . On peut donc définir le quotient par rapport à un sous-ensemble de  $E(G)$ .

2) Le quotient préserve les composantes connexes : si le graphe  $G$  est connexe, tout quotient de  $G$  reste connexe ; le quotient d'une réunion disjointe est une réunion disjointe de quotients.

3) Tout sous-graphe  $W$  du quotient  $G/S$  se relève canoniquement en un sous-graphe  $\tilde{W}$  de  $G$  tel que  $\tilde{W}$  et  $S$  n'ont aucune arête commune.



L'intérêt de cette construction est dans la proposition suivante, qui établit une propriété universelle des graphes quotients concernant les forêts couvrantes :

**Proposition 2.10.** *Soit  $G$  un graphe et  $S$  un sous-graphe de  $G$ . Soit  $T$  une forêt couvrante quelconque de  $S$ . Alors il y a une bijection naturelle entre les deux ensembles*

$$\{\text{forêts couvrantes de } G/S\} \xleftrightarrow{\text{bijection}} \{\text{forêts couvrantes de } G \text{ contenant } T\}$$

*En particulier, si  $S$  est une forêt et  $G$  est connexe, l'ensemble des arbres couvrants de  $G/S$  est en bijection avec l'ensemble des arbres couvrants de  $G$  contenant  $S$ .*

*Démonstration.* Soit  $S$  un sous-graphe de  $G$  et  $T$  une forêt couvrante de  $S$ .

Soit  $U$  une forêt couvrante de  $G$  contenant  $T$ . Le graphe  $U$  passe au quotient par  $S$  et donne un sous-graphe  $\bar{U}$  de  $G/S$ , qui est une forêt couvrante de  $G/S$ , car si  $\bar{U}$  possédait un cycle, ce cycle se relèverait en un cycle de  $U$ , ce qui serait impossible.

Réciproquement, soit  $W$  une forêt couvrante de  $G/S$ . Alors le relèvement canonique  $\tilde{W}$  de  $W$  est un sous-graphe de  $G$  n'ayant aucune arête commune avec  $S$ . On montre facilement que le graphe  $\tilde{W} \amalg T$ , dont l'ensemble des arêtes est la réunion disjointe  $E(\tilde{W}) \amalg E(T)$ , est une forêt couvrante de  $G$  qui contient  $T$ .

On vérifie que les deux applications  $U \mapsto \bar{U}$  et  $W \mapsto \tilde{W} \amalg T$  ci-dessus sont l'une l'inverse de l'autre, ce qui donne la bijection de l'énoncé.  $\square$

**Remarque 2.11.** On a une propriété universelle similaire pour la différence : si  $G$  est un graphe connexe et  $S \subset E(G)$ , alors il y a une bijection naturelle entre les deux ensembles

$$\{\text{arbres couvrants de } G - S\} \xleftrightarrow{\text{bijection}} \{\text{arbres couvrants de } G \text{ disjoints avec } S\}$$

## 2.2. Un peu de géométrie algébrique.

Il y a un point de vue géométrique qui remplace le point de vue combinatoire dans l'introduction : au lieu de travailler dans  $\mathbf{CMot}$ , on peut aussi bien travailler dans l'anneau de Grothendieck des schémas sur  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , et alors un certain nombre d'énoncés restent vrais si on remplace le comptage de points d'un schéma par un procédé algébrique qui stratifie un schéma en sous-schémas disjoints.

Avant de traiter ce point de vue, on étudie d'abord quelques propriétés des schémas. Commençons par la notion d'immersion :

**Définition 2.12.** *Un morphisme de schémas est une **immersion** s'il se factorise par une immersion fermée suivie d'une immersion ouverte. Autrement dit, un morphisme  $Y \rightarrow X$  est une immersion s'il se factorise par  $Y \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} X$ , où  $f$  est une immersion fermée et  $g$  est une immersion ouverte.*

*Soit  $X$  un schéma. Un **sous-schéma localement fermé** (ou simplement un **sous-schéma**) de  $X$  est une classe d'équivalence d'immersions, où deux immersions  $i : Y \rightarrow X$  et  $i' : Y' \rightarrow X$  sont équivalentes s'il existe un isomorphisme  $\phi : Y \rightarrow Y'$  tel que  $i = i' \circ \phi$ .*

**Lemme 2.13.** *La composition de deux immersions est encore une immersion.*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer l'énoncé suivant : soient  $f : Z \rightarrow Y$  une immersion ouverte et  $g : Y \rightarrow X$  une immersion fermée, alors la composée  $g \circ f : Z \rightarrow X$  est une

immersion. On sait que la topologie de  $Y$  est induite par celle de  $X$ , et le schéma  $Z$  est un ouvert de Zariski de  $Y$ . Donc il existe un ouvert  $X'$  de  $X$  tel que  $Z = g^{-1}(X')$ . Et alors le morphisme  $g$  induit une immersion fermée  $Z \rightarrow X'$ , avec  $X' \rightarrow X$  une immersion ouverte, ce qui achève la preuve.  $\square$

On a aussi une notion d'intersection schéma-théorique bien connue :

**Définition 2.14.** Soient  $X$  un schéma et  $f : Y \rightarrow X$ ,  $f' : Y' \rightarrow X$  deux immersions fermées. L'**intersection schéma-théorique** de  $f$  et  $f'$  est le produit fibré  $Y \times_X Y' \rightarrow X$ , qui reste une immersion fermée. On la note aussi  $Y \cap Y'$ .

**Exemple 2.15.** Soient  $X$  un schéma séparé et  $\sigma : X \rightarrow X$  un automorphisme. Alors le morphisme diagonal  $\Delta : X \rightarrow X \times X$ , et le graphe du morphisme  $\sigma$ ,  $Gr(\sigma) : X \rightarrow X \times X$ , sont des immersions fermées. On définit  $Fix(\sigma)$ , le **schéma des points fixes** de  $\sigma$ , comme l'intersection schéma-théorique de  $\Delta$  et  $Gr(\sigma)$ , qui est a priori un sous-schéma fermée de  $X \times X$ , mais que l'on peut voir aussi comme un sous-schéma fermée de  $X$ .

Plus généralement, dans la définition on peut remplacer les immersions fermées par des immersions, et de façon analogue la construction donne une immersion.

Maintenant on cherche un cadre approprié pour couper un schéma en morceaux plus petits. On a d'abord la notion de découpage :

**Définition 2.16.** Un **découpage** est un triplet de schémas  $(U, Z, X)$ , où  $Z$  est un sous-schéma fermé de  $X$  et  $U$  est le complémentaire ouvert de  $Z$  dans  $X$ . On note aussi  $U = X \setminus Z$ .

Si  $(U, Z, X)$  est un découpage où les trois schémas sont de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , alors les fonctions de comptage sont reliés par la relation  $|U| + |Z| = |X|$ . On cherche à une généralisation de l'anneau des motifs combinatoires tout en conservant cette égalité, en regardant les schémas eux-mêmes en tant qu'une sorte de motifs à la place de leurs fonctions de comptage, ce qui entraîne la définition suivante :

**Définition 2.17.** On note  $K_0(Var_{\mathbb{Z}})$  le groupe abélien engendré par les symboles de la forme  $[X]$ , où  $X$  est une classe d'isomorphisme de schémas de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , modulo la relation suivante : si  $(U, Z, X)$  est un découpage, alors  $[X] = [U] + [Z]$ .<sup>5</sup> C'est aussi un anneau, dont la multiplication est définie par  $[X][Y] = [X \times Y]$ , et dont la classe  $[Spec \mathbb{Z}]$  est l'unité. On l'appelle l'**anneau de Grothendieck** (des schémas sur  $\mathbb{Z}$ ).

C'est une version élémentaire de la notion de motif : dans l'anneau de Grothendieck on décompose un schéma en deux morceaux par un découpage, et par définition la somme des deux morceaux est égale au schéma original. Et comme dans le combinatoire, on va inverser un certain nombre d'éléments dans  $K_0(Var_{\mathbb{Z}})$  :

5. De cette relation on déduit facilement le fait que si  $X$  et  $Y$  sont deux schémas et que les parties réduites  $X_{red}$  et  $Y_{red}$  sont isomorphes, alors  $[X] = [Y]$  dans  $K_0(Var_{\mathbb{Z}})$ . Donc en quelque sorte les classes de  $K_0(Var_{\mathbb{Z}})$  sont topologiques.

**Définition 2.18.** On note  $\mathbb{L} = [\mathbb{A}^1]$  le **motif de Lefschetz**. Dans l'anneau  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{Z}})$  on a un sous-anneau  $\mathbb{Z}[\mathbb{L}]$ , ce qui fait  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{Z}})$  une  $\mathbb{Z}[\mathbb{L}]$ -algèbre.

On définit  $R$  comme la localisation de l'anneau  $\mathbb{Z}[\mathbb{L}]$  par rapport aux éléments  $\mathbb{L}$  et les  $\mathbb{L}^k - 1$ , pour  $k \geq 1$ . On définit  $S$  comme l'ensemble des éléments de  $R$  de la forme  $\mathbb{L}^{a_0}(\mathbb{L} - 1)^{a_1} \cdots (\mathbb{L}^n - 1)^{a_n}$ , où  $a_i \in \mathbb{Z}$ , qui sont inversibles dans  $R$ .

On définit **GeoMot** comme le  $R$ -module  $K_0(\text{Var}_{\mathbb{Z}}) \times_{\mathbb{Z}[\mathbb{L}]} R$ , qui est muni d'une structure de  $R$ -algèbre par le produit fibré. On l'appelle l'anneau des **motifs géométriques**.<sup>6</sup>

Clairement les fonctions de comptage vérifient une relation additive pour les découpages, on voit donc qu'il existe un morphisme d'anneaux canonique  $ev : \mathbf{GeoMot} \rightarrow \mathbf{CMot}$ , appelé l'**application d'évaluation**, qui envoie  $[X]$  sur  $|X|$ , et qui est surjectif. On a ainsi une analogie entre le cas combinatoire et le cas géométrique : l'application d'évaluation  $ev$  envoie l'anneau  $R$  sur l'anneau  $\mathbf{R}$ , le système multiplicatif  $S$  sur le système multiplicatif  $\mathbf{S}$ , et le motif  $[\mathbb{L}]$  sur la fonction  $q$ . Par cette application d'évaluation, les égalités dans **GeoMot** impliquent des égalités dans **CMot**.<sup>7</sup>

On peut également envisager une version géométrique du Théorème 1.7, qui est aussi un théorème :

**Théorème 2.19.** Soit **Graphs** le sous  $R$ -module de **GeoMot** engendré par les  $[Y_G]$  et **Graphs\*** le sous  $R$ -module de **GeoMot** engendré par les  $[Z_G]$ , où  $G$  parcourt l'ensemble des graphes simples. Alors on a l'égalité

$$\mathbf{Graphs}_* = \mathbf{Graphs} = \mathbf{GeoMot}.$$

Mais dans ce mémoire on démontre seulement le cas combinatoire. On travaillera essentiellement dans **CMot**, sauf dans la Section 2.3 et dans la démonstration de l'universalité de Mnëv, où on travaille dans **GeoMot**.<sup>8</sup>

Maintenant on introduit la notion de stratification, qui généralise celle de découpage :

**Définition 2.20.** Soient  $X$  un schéma et  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose qu'il existe une suite décroissante  $X \supset Z_1 \supset \cdots \supset Z_n$  de sous-schémas fermés de  $X$ , et on note  $U_1 = X \setminus Z_1$ , et  $U_i = Z_i \setminus Z_{i-1}$  pour  $2 \leq i \leq n$ , vus comme sous-schémas de  $X$ . Dans une telle situation, on dit que l'ensemble  $\{U_1, U_2, \dots, U_n, Z_n\}$  est une **stratification** (finie) de  $X$ . Les éléments  $U_1, U_2, \dots, U_n, Z_n$ , appelés **strates**, forment une partition de l'espace topologique sous-jacent de  $X$ .

Une première propriété est que une stratification est stable par changement de base :

**Lemme 2.21.** Soient  $X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas et  $S$  une stratification de  $Y$ . Alors l'ensemble  $S_X = \{Z \times_Y X \mid Z \in S\}$  est une stratification du schéma  $X$ .

6. Dans la théorie de l'intégration motivique, on travaille dans un complété de l'anneau des motifs, dans lequel les motifs  $\mathbb{L}$  et les  $\mathbb{L}^k - 1$  sont inversibles. Voir [Hoskins].

7. En général il paraît faux de faire des choses dans le sens inverse : par exemple on peut montrer que pour un corps algébriquement clos  $k$  de caractéristique 0, l'anneau  $K_0(\text{Var}_k)$  n'est pas intègre. Voir [Poonen].

8. Pour démontrer le Théorème 2.19, la stratégie est la même que dans le cas combinatoire, et il suffit de démontrer un certain nombre d'analogues géométriques des égalités combinatoires qui seront établies dans la suite.

*Démonstration.* Une immersion ouverte (respectivement immersion fermée) reste une immersion ouverte (respectivement immersion fermée) après un changement de base. De plus, un changement de base préserve la complémentarité. Donc si  $X \rightarrow Y$  est un morphisme de schémas et  $(U, Z, Y)$  est un découpage, alors  $(U \times_Y X, Z \times_Y X, X)$  est encore un découpage. Le lemme en découle par récurrence.  $\square$

Le lemme suivant généralise la propriété additive d'un découpage, qui est automatique à partir de la définition :

**Lemme 2.22.** *Soit  $X$  un schéma et  $S$  une stratification de  $X$ . Alors dans l'anneau  $\text{GeoMot}$  on a*

$$(1) \quad \sum_{Z \in S} [Z] = X.$$

*Notons que la somme est finie car une stratification est finie par définition.*

On établit maintenant l'existence d'une stratification en schémas affines :

**Proposition 2.23.** *Tout schéma noethérien admet une stratification en schémas affines.*

*Plus généralement, soit  $\mathcal{P}$  une propriété locale sur les schémas noethériens. Alors tout schéma noethérien qui vérifie la propriété  $\mathcal{P}$  admet une stratification en schémas affines vérifiant la propriété  $\mathcal{P}$ .*

*En particulier, tout schéma de type fini sur  $\mathbb{Z}$  admet une stratification en schémas affines de type fini.*

**Exemple 2.24.** L'espace projectif  $\mathbb{P}^N$  admet une stratification en  $(N + 1)$  strates affines  $\{\mathbb{A}^N, \mathbb{A}^{N-1}, \dots, \mathbb{A}^0 = \text{Spec } \mathbb{Z}\}$ . On a alors la formule

$$[\mathbb{P}^N] = 1 + \mathbb{L} + \mathbb{L}^2 + \dots + \mathbb{L}^N.$$

*Démonstration.* La preuve se fait par l'induction noethérienne. Soit  $X$  un schéma noethérien. En particulier,  $X$  est un espace topologique noethérien.

Supposons que  $X$  n'admet pas de stratification en schémas affines. En particulier,  $X$  est non vide. Soit  $U$  un ouvert affine non vide de  $X$  quelconque. Le complémentaire de  $U$  dans  $X$  définit un sous-schéma fermé réduit  $Z$  de  $X$ . Si le schéma  $Z$  admettait une stratification en schéma affines, alors  $X$  en admettrait une aussi, ce qui contredit par hypothèse. Donc  $Z$  non plus n'admet pas de stratification en schémas affines. Le schéma  $Z$  est un fermé propre de  $X$  et vérifie les mêmes hypothèses que  $X$ , et par le même argument, on peut trouver un fermé propre  $Z_1 \subset Z$  qui n'admet pas de stratification en schémas affines. En répétant le procédé, on construit une chaîne infinie strictement décroissante  $X \supset Z \supset Z_1 \cdots$  de fermés propres de  $X$ , ce qui est absurde car  $X$  est un espace topologique noethérien.

On en conclut que  $X$  admet une stratification en schémas affines.

Si  $X$  vérifie la propriété  $\mathcal{P}$ , comme c'est une condition locale, quitte à restreindre les ouverts affines dans le raisonnement précédent, on peut supposer qu'ils vérifient la propriété  $\mathcal{P}$  aussi, et le résultat en découle.  $\square$

**Remarque 2.25.** L'idée de la preuve précédente est naïve : à chaque fois on enlève un ouvert affine, et on espère qu'après un nombre fini de fois on aura un schéma affine, ce qui fournit alors une stratification en schémas affines. La preuve donne un résultat plus fort : quelque soit la manière dont on choisit l'ouvert affine à chaque étape, le procédé se termine toujours. Mais il arrive que certains choix sont canoniques ou préférables. Plus généralement, on peut définir une notion de stratification topologique sur des espaces topologiques noethériens.

On termine cette section en introduisant la notion de fibration de Zariski :

**Définition 2.26.** Soit  $F$  un schéma. Un morphisme de schémas  $X \rightarrow Y$  est une **fibration** (localement triviale) de fibre  $F$  pour la topologie de Zariski s'il existe un recouvrement d'ouverts  $\{Y_i\}_{i \in I}$  de  $Y$  tel que pour tout  $i \in I$ , on a un isomorphisme de schémas  $X \times_Y Y_i \simeq F \times_{\mathbb{Z}} Y_i$ . Une fibration est triviale si cette propriété est globale, i.e. si on a  $X \simeq F \times_{\mathbb{Z}} Y$ .

**Remarque 2.27.** 1) Le fait d'être une fibration est une propriété locale en le schéma d'arrivée : si  $F$  est un schéma et  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de schémas, alors  $f$  est une fibration de fibre  $F$  si et seulement si pour tout point  $y$  de  $Y$ , on a un isomorphisme de schémas  $f^{-1}(y) \simeq F \times k(y)$ , où  $k(y)$  désigne le corps résiduel du point  $y$ .

2) Par la propriété du produit fibré, une fibration triviale reste une fibration triviale après un changement de base : si  $X \rightarrow Y$  est une fibration triviale de fibre  $F$  et  $Z \rightarrow Y$  un morphisme de schémas, alors le tiré-en-arrière  $X \times Z \rightarrow Z$  est encore une fibration triviale de fibre  $F$ . En particulier, si  $Z$  est un sous-schéma de  $Y$ , alors une fibration triviale sur  $Y$  reste triviale sur  $Z$ .

3) Une fibration de fibre  $\text{Spec } \mathbb{Z}$  est un isomorphisme de schémas.

Par définition le produit fibré, ou de manière équivalente les fibrations triviales, définit la loi multiplicative dans l'anneau  $\text{GeoMot}$ . Plus généralement cette propriété reste valable pour toutes les fibrations en général :

**Proposition 2.28.** Soient  $Y$  et  $F$  deux schémas de type fini sur  $\mathbb{Z}$  et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme de schémas de type fini qui est une fibration de fibre  $F$ . Alors dans l'anneau  $\text{GeoMot}$  on a l'égalité  $[X] = [Y] \cdot [F]$ .

*Démonstration.* On se ramène au cas local via une stratification. Comme une fibration est localement triviale, d'après la Proposition 2.23, le schéma  $Y$  admet une stratification  $S$  telle que la fibration  $f$  soit triviale sur chaque strate, i.e. pour tout  $Z \in S$  on a  $Z \times_Y X \simeq Z \times_{\mathbb{Z}} F$ . D'après le Lemme 2.21, on sait que l'ensemble  $\{Z \times_Y X \mid Z \in S\}$  est une stratification du schéma  $X$ . D'après le Lemme 2.22, on a donc

$$[X] = \sum_{Z \in S} [Z \times_Y X] = \sum_{Z \in S} [Z \times_{\mathbb{Z}} F] = [F] \sum_{Z \in S} [Z] = [F] [Y].$$

□

### 2.3. Le module de tous les graphes.

Dans cette section on étudie les relations entre les deux types de motifs  $[X_G]$  et  $[Y_G]$ . Le but est de démontrer la Proposition 1.9, en montrant le fait que lorsque  $G$  parcourt l'ensemble des graphes, alors ces deux types de motifs engendrent le même sous-R-module de  $\text{GeoMot}$ .

**Notations 2.29.** On note  $\mathbb{G} = \text{Spec } \mathbb{Z}[x, \frac{1}{x}]$  le groupe multiplicatif.

Si  $E = \{e_1, \dots, e_k\}$  est un ensemble fini, on note  $\mathbb{A}^E = \text{Spec } \mathbb{Z}[x_{e_1}, \dots, x_{e_k}]$  l'espace affine associé à  $E$ , et  $\mathbb{G}^E = \text{Spec } \mathbb{Z}[x_{e_1}, \frac{1}{x_{e_1}}, \dots, x_{e_k}, \frac{1}{x_{e_k}}]$  qui est un ouvert de Zariski de  $\mathbb{A}^E$ .

Soient  $E$  un ensemble fini et  $S \subset E$ . L'inclusion  $S \rightarrow E$  induit une immersion fermée  $\mathbb{A}^S \rightarrow \mathbb{A}^E$ , et alors on peut voir  $\mathbb{G}^S$  comme un sous-schéma de  $\mathbb{A}^E$ . C'est le lieu où les coordonnées affines dont l'indice est dans  $S$  ne s'annule pas et celles dont l'indice est en dehors de  $S$  s'annulent, et est isomorphe à un produit de  $\#S$  copies de  $\mathbb{G}$ . On remarque que lorsque  $S$  parcourt  $\mathcal{P}(E)$ , les sous-schémas  $\mathbb{G}^S$  forment une stratification de l'espace total  $\mathbb{A}^E$ , par les valeurs booléennes des indices de là où les coordonnées s'annulent.

Pour tout sous-schéma  $X \rightarrow \mathbb{A}^E$ , on note  $X^S = X \cap \mathbb{A}^{E \setminus S}$  et  $X^{S,+} = X \cap \mathbb{G}^{E \setminus S}$ , définis par des intersections schéma-théoriques. Le schéma  $X^S$  est l'intersection de  $X$  avec des hyperplans définis par des équations  $x_e = 0$  pour  $e \in S$ , et  $X^{S,+}$  est l'ouvert de  $X^S$  défini par les inégalités  $x_e \neq 0$  pour tout  $e \in E \setminus S$ .

Notons que l'on a  $X^\emptyset = X$ . On note aussi  $X^+ = X^{\emptyset,+}$ .

**Remarque 2.30.** D'après le Lemme 2.21, lorsque  $S$  parcourt  $\mathcal{P}(E)$ , les sous-schémas  $X^{S,+}$  forment une stratification de  $X$ . De même, pour un  $S \in \mathcal{P}(E)$  fixé, lorsque  $S'$  parcourt l'ensemble des sous-ensembles de  $E$  contenant  $S$ , les sous-schémas  $X^{S',+}$  forment une stratification de  $X^S$ . On a donc :

$$[X^S] = \sum_{S \subset S' \subset E} [X^{S',+}].$$

Par le principe d'inclusion-exclusion, on peut inverser la relation précédente pour obtenir

$$[X^{S,+}] = \sum_{S \subset S' \subset E} (-1)^{\#S' - \#S} [X^{S'}].$$

En particulier, lorsque  $S = \emptyset$ , on a les formules suivantes :

$$(2) \quad [X] = \sum_{S' \subset E} [X^{S',+}],$$

$$(3) \quad [X^+] = \sum_{S' \subset E} (-1)^{\#S'} [X^{S'}].$$

Ce qui nous intéresse maintenant est le cas où  $X = X_G$  ou  $Y_G$ , pour  $G$  un graphe. On a d'abord le lemme suivant, qui permet d'identifier  $X_G^S$  (resp.  $Y_G^S$ ) avec un autre schéma de la forme  $X_{G'}$  (resp.  $Y_{G'}$ ) :

**Lemme 2.31.** Soient  $G$  un graphe connexe,  $E = E(G)$  et  $S \subset E$ .

1) On a des isomorphismes  $X_G^S \simeq X_{G-S}$  et  $X_G^{S,+} \simeq X_{G-S}^+$ .

2) Si  $S$  est une forêt, on a des isomorphismes  $Y_G^S \simeq Y_{G/S}$  et  $Y_G^{S,+} \simeq Y_{G/S}^+$ .

Si  $S$  n'est pas une forêt, alors les schémas  $Y_G^S$  et  $Y_G^{S,+}$  sont vides.

*Démonstration.* L'inclusion  $\mathbb{A}^{E \setminus S} \rightarrow \mathbb{A}^E$  provient d'un morphisme d'anneaux surjectif  $\phi^S : \mathbb{Z}[x_e]_{e \in E} \rightarrow \mathbb{Z}[x_e]_{e \in E \setminus S}$ , qui envoie les  $x_e$  où  $e \in S$  sur 0.

1) L'image du polynôme  $Q_G$  par  $\phi^S$  est le polynôme  $Q_G^S = \sum_T \prod_{e \in T} x_e$ , où la somme porte sur les  $T$  qui sont arbres couvrants de  $G$  n'ayant aucune arête commune avec  $S$ . Or d'après la Remarque 2.11, l'ensemble de tels arbres couvrants est en bijection avec l'ensemble des arbres couvrants du graphe  $G - S$ . Alors si on voit  $G - S$  comme un sous-graphe de  $G$  canoniquement, on a une identification canonique  $Q_G^S = Q_{G-S}$ . Donc le schéma  $X_{G-S}$ , qui est l'ouvert de Zariski dans  $\mathbb{A}^{E \setminus S}$  défini par le polynôme  $Q_{G-S}$ , est égal à l'intersection de  $X_G$  avec  $\mathbb{A}^{E \setminus S}$ , qui est  $X_G^S$  par définition.

Le deuxième isomorphisme  $X_G^{S,+} \simeq X_{G-S}^+$  découle d'un argument similaire.

2) L'image du polynôme  $P_G$  par  $\phi^S$  est le polynôme  $P_G^S = \sum_T \prod_{e \notin T} x_e$ , où la somme porte sur les  $T$  qui sont arbres couvrants de  $G$  contenant  $S$ . On applique la Proposition 2.10 et on distingue deux cas de figure :

Si  $S$  n'est pas une forêt,  $S$  contient un cycle, et il n'existe pas d'arbre couvrant de  $G$  contenant  $S$ . Donc on a  $\phi^S(P_G) = 0$ , et l'intersection de  $Y_G$  avec  $\mathbb{A}^{E \setminus S}$  est vide. De même on voit que le schéma  $Y_G^{S,+}$  est vide.

Si  $S$  est une forêt, l'ensemble de arbres couvrants contenant  $S$  est non vide, et est en bijection avec l'ensemble des arbres couvrants du graphe quotient  $G/S$ . Via l'application canonique  $G \rightarrow G/S$ , le polynôme  $P_G^S$  est envoyé sur le polynôme  $P_{G/S}$ , ce qui donne un isomorphisme  $Y_G^S \simeq Y_{G/S}$ .

Le deuxième isomorphisme  $Y_G^{S,+} \simeq Y_{G/S}^+$  découle d'un argument similaire.  $\square$

On a aussi un deuxième lemme qui permet de relier directement les schémas  $X_G$  et  $Y_G$  d'un même graphe  $G$  :

**Lemme 2.32.** *Soit  $G$  un graphe connexe. On a un isomorphisme  $X_G^+ \simeq Y_G^+$ .*

*Démonstration.* On remarque d'abord que l'on a des identifications  $X_G^+ = \text{Spec } A$  et  $Y_G^+ = \text{Spec } B$ , où  $A = \mathbb{Z}[x_{e_1}, x_{e_1}^{-1}, \dots, x_{e_k}, x_{e_k}^{-1}, \frac{1}{Q_G}]$  et  $B = \mathbb{Z}[x_{e_1}, x_{e_1}^{-1}, \dots, x_{e_k}, x_{e_k}^{-1}, \frac{1}{P_G}]$ .

Si  $x = (x_e)_{e \in E}$ , on note  $x^{-1} = (x_e^{-1})_{e \in E}$ . Alors on a l'identité  $Q_G(x) = P_G(x^{-1}) \prod_{e \in E} x_e$ , qui provient naturellement de la définition.

On a donc un morphisme d'anneaux  $\psi : A \rightarrow B$ , qui envoie chaque  $x_{e_i}$  sur  $x_{e_i}^{-1}$ . Alors le polynôme  $Q_G$  est envoyé sur  $P_G \prod_{e \in E} x_e^{-1}$ , qui est égal à  $P_G$  à un élément inversible de  $B$  près. On conclut que  $\psi$  est un isomorphisme, et alors on a un isomorphisme  $X_G^+ \simeq Y_G^+$ .  $\square$

On a maintenant les outils pour montrer le résultat principal de cette section :

**Proposition 2.33.** *Le sous-groupe abélien de GeoMot genendré par les  $[X_G]$  où  $G$  parcourt l'ensemble des graphes, est égal au sous-groupe abélien genendré par les  $[Y_G]$ .*

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe, que l'on peut supposer connexe. En tenant compte des formules précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
(4) \quad [Y_G] &\stackrel{(2)}{=} \sum_{S' \subset E(G)} [Y_G^{S',+}] \\
&= \sum_{\substack{S' \subset E(G) \\ S' \text{ forêt}}} [Y_{G/S'}^+] = \sum_{\substack{S' \subset E(G) \\ S' \text{ forêt}}} [X_{G/S'}^+] \\
&\stackrel{(3)}{=} \sum_{\substack{S' \subset E(G) \\ S' \text{ forêt}}} \sum_{S'' \subset E(G/S')} (-1)^{\#S''} [X_{(G/S')-S''}]
\end{aligned}$$

De même, on a une égalité de même type en échangeant les rôles de  $X_G$  et  $Y_G$  :

$$(5) \quad [X_G] = \sum_{S' \subset E} \sum_{\substack{S'' \subset E \setminus S' \\ S'' \text{ forêt}}} (-1)^{\#S''} [Y_{(G-S')/S''}]$$

La proposition découle des formules (4) et (5).  $\square$

On facilement le corollaire suivant :

**Corollaire 2.34.** *Le  $\mathbf{R}$ -module  $\mathbf{Graphs}$  est égal au sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{GeoMot}$  engendré par les  $[X_G]$ .*

*En particulier, le  $\mathbf{R}$ -module  $\mathbf{CGraphs}$  est égal au sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{CMot}$  engendré par les  $|X_G|$ .*

#### 2.4. Les schémas déterminantaux.

Dans cette section on continue à travailler sur les schémas, en développant des définitions et propriétés élémentaires en géométrie algébrique nécessaires pour la définition des schémas d'incidence.

**Notations 2.35.** Si  $A$  est un anneau et  $I$  un idéal de  $A$ , on note  $V(I)$  le fermé de Zariski de  $\text{Spec } A$  défini par  $I$ .

Soient  $e, f \in \mathbb{N}$  deux entiers. On note  $S$  un schéma noethérien et  $E$  et  $F$  deux  $\mathcal{O}_S$ -modules localement libres de rang respectivement  $e$  et  $f$ . Si  $s \in S$  est un point, on note  $k(s)$  le corps résiduel en  $s$ .

On note  $(\text{Sch}/S)$  la catégorie des  $S$ -schémas et  $\mathbf{Ab}$  la catégorie des groupes abéliens. Si  $T$  est un  $S$ -schéma, on note  $E_T$  le tiré-en-arrière du faisceau  $E$  par le morphisme  $T \rightarrow S$ , et on note  $F_T$  de la même façon. On note  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(E, F)$  le groupe abélien des homomorphismes de  $E$  à  $F$ . On rappelle (voir [Grothendieck], Corollaire 7.7.8) que le foncteur contravariant

$$\begin{aligned}
(\text{Sch}/S) &\rightarrow \mathbf{Ab} \\
T &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_T}(E_T, F_T)
\end{aligned}$$

est représentable par un  $S$ -schéma en groupes abéliens, noté  $\text{Hom}(E, F)$ .

On commence par définir un analogue géométrique de la notion algébrique du rang d'une matrice :



**Définition 2.36.** Soient  $K$  un sous- $\mathcal{O}_S$ -module de  $F$  et  $r \in \mathbb{N}$ . On dit que  $K$  est un **facteur direct** de  $F$  de rang  $r$  si  $K$  est localement libre de rang  $r$  et qu'il admet un supplémentaire localement libre de rang  $f - r$  dans  $F$ .

Soit  $\phi : E \rightarrow F$  un morphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules. On dit que  $\phi$  est de **rang**  $r$  si son image est un facteur direct de  $F$  de rang  $r$ .

**Exemple 2.37.** On note  $Gr(r, E)$  la **grassmannienne** des  $r$ -plans dans  $E$ . C'est un schéma qui représente le foncteur

$$(Sch/S) \rightarrow \mathbf{Ab}$$

$$T \mapsto \{\text{classes d'isomorphismes de facteurs directs de } E_T \text{ de rang } r\}.$$

On définit maintenant la notion de lieu de dégénérescence qui, comme on le verra plus tard, exprime cette condition de rang :

**Définition 2.38.** Soient  $r \in \mathbb{N}$  et  $\phi : E \rightarrow F$  un morphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules. Le  $(r + 1)$ -ième produit extérieur du morphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules  $\phi$  est le morphisme

$$\wedge^{r+1} \phi : \wedge^{r+1} E \rightarrow \wedge^{r+1} F,$$

dont le noyau  $Ker(\wedge^{r+1} \phi)$  est un faisceau d'idéaux sur  $S$ . On définit le  $r$ -ième **lieu de dégénérescence**  $D_r(\phi)$  comme le sous-schéma fermé de  $S$  défini par le faisceau d'idéaux  $Ker(\wedge^{r+1} \phi)$ .

Localement dans un ouvert affine sur lequel les faisceaux sont libres, le morphisme  $\phi$  s'exprime en une matrice  $e \times f$ , et le schéma  $D_r(\phi)$  est défini par l'idéal engendré par tous les  $(r + 1) \times (r + 1)$ -mineurs de la matrice de  $\phi$ . L'espace topologique sous-jacent du schéma  $D_r(\phi)$  est l'ensemble des points  $s \in S$  tel que le morphisme résiduel  $\phi \otimes k(s)$  est de rang inférieur ou égal à  $r$ . Alors pour tout  $r \geq 1$  on a une inclusion  $D_r(\phi) \supset D_{r-1}(\phi)$ . On définit ainsi, pour  $r \geq 1$ , le schéma  $Z_r(\phi)$  comme le complémentaire ouvert de  $D_{r-1}(\phi)$  dans  $D_r(\phi)$ , et  $Z_0(\phi) = D_0(\phi)$ . Chaque  $Z_r(\phi)$  est un sous-schéma de  $S$ , dont l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble des points  $s \in S$  tel que le morphisme résiduel  $\phi \otimes k(s)$  est de rang exactement  $r$ . Les schémas  $Z_r(\phi)$  forment une stratification du schéma  $S$ .

Revenons sur le schéma  $Hom(E, F)$ . Par définition, pour tout  $S$ -schéma  $T$ , on a

$$(6) \quad Hom_{(Sch/S)}(T, Hom(E, F)) = Hom_{\mathcal{O}_T}(E_T, F_T).$$

Notons  $\pi : Hom(E, F) \rightarrow S$  le morphisme de structure. En remplaçant  $T$  par  $Hom(E, F)$  dans la formule (6), on obtient un morphisme de  $\mathcal{O}_{Hom(E, F)}$ -modules canonique  $\phi : \pi^* E \rightarrow \pi^* F$  qui correspond au morphisme identité dans le terme à gauche. La propriété universelle du couple  $(Hom(E, F), \phi)$  s'interprète aussi de la façon suivante : pour tout  $S$ -schéma  $T$  et tout morphisme  $\psi : E_T \rightarrow F_T$ , il existe un unique morphisme  $T \rightarrow Hom(E, F)$  tel que  $\psi \simeq \phi_T$ .

C'est les lieux de dégénérescence de ce morphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules  $\phi$  qui nous intéresse, et que l'on va définir comme les schémas déterminantaux :

**Définition 2.39.** Soit  $r \in \mathbb{N}$ . On définit  $Hom_{\leq r}(E, F)$  comme le  $r$ -ième lieu de dégénérescence  $D_r(\phi)$ , qui est un sous-schéma fermé du schéma  $Hom(E, F)$ , et  $Hom_r(E, F)$

comme le schéma  $Z_r(\phi)$ , qui est un sous-schéma de  $\text{Hom}(E, F)$ . On appelle ces deux types de schémas les **schémas déterminantaux**.

Les  $\text{Hom}_r(E, F)$  forment une stratification de  $\text{Hom}(E, F)$ . De plus, on peut montrer le résultat suivant : si  $S$  est un schéma noethérien, alors le schéma  $\text{Hom}_r(E, F)$  représente le foncteur contravariant

$$\begin{aligned} (\text{Sch}/S) &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ T &\mapsto \{\psi : E_T \rightarrow F_T \mid \psi \text{ est de rang } r\}. \end{aligned}$$

C'est une interprétation fonctorielle du schéma  $\text{Hom}_r(E, F)$ , qui justifie que ce dernier exprime exactement la condition de rang.

On a une description locale de ces schémas déterminantaux : soit  $(y_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq e \\ 1 \leq j \leq f}}$  un ensemble de variables formelles, qu'on identifie avec les coordonnées d'une matrice  $e \times f$ . On suppose que  $S = \text{Spec } A$  est un schéma affine et que  $E = \mathcal{O}_S^e$ ,  $F = \mathcal{O}_S^f$ . Soit  $A[y]$  l'anneau des polynômes en toutes les variables  $y_{ij}$ , et alors  $\text{Hom}(E, F)$  est le schéma affine  $\text{Spec}(A[y])$ . Pour chaque entier  $k$ , soit  $m_i^k \in \mathbb{Z}[y_{ij}]$  une liste de tous les  $k \times k$ -mineurs, et soit  $I_k$  l'idéal engendré par toutes les  $m_i^k$ . Alors  $\text{Hom}_{\leq r}(E, F)$  est le sous-schéma fermé de  $\text{Hom}(E, F)$  défini par tous les  $(r+1) \times (r+1)$  mineurs : c'est le schéma affine  $\text{Spec}(A[y]/I_{r+1})$ . Et  $\text{Hom}_r(E, F)$  est l'ouvert de Zariski de  $\text{Hom}_{\leq r}(E, F)$  défini par le fait qu'au moins un  $r \times r$  mineur est inversible :

$$\text{Hom}_r(E, F) = \bigcup_i \text{Spec}(A[y]/I_{r+1})_{(m_i^k)},$$

formule qui permet d'identifier  $\text{Hom}_r(E, F)$ , sous-schéma localement fermé de  $\text{Hom}(E, F)$  avec une réunion de schémas affines. Il s'en suit que l'espace topologique associé à  $\text{Hom}_r(E, F)$  est tout simplement  $\bigcap_i V(m_i^{r+1}) \setminus \bigcap_i V(m_i^r)$ .

Un premier exemple d'application est de définir les schémas correspondant aux formes bilinéaires symétriques :

**Définition 2.40.** Soit  $E^\vee$  le faisceau dual de  $E$ . Il y a un automorphisme de transposition naturel  $t : \text{Hom}(E, E^\vee) \rightarrow \text{Hom}(E, E^\vee)$ . On définit  $\text{Sym } E = \text{Fix}(t)$  comme le schéma des points fixes de  $t$ . On note  $\text{Sym}_r E$  (respectivement  $\text{Sym}_{\leq r} E$ ) l'intersection schématisée de  $\text{Sym } E$  avec  $\text{Hom}_r(E, E^\vee)$  (respectivement avec  $\text{Hom}_{\leq r}(E, E^\vee)$ ).

On a aussi une description locale de ces schémas : lorsque  $S = \text{Spec } A$  et  $E = \mathcal{O}_S^e$ ,  $\text{Sym } E$  est le sous-schéma fermé de  $\text{Spec } A[y]$  défini par les équations  $y_{ij} = y_{ji}$  ;  $\text{Sym}_{\leq r} E$  est le sous-schéma fermé de  $\text{Sym } E$  défini par tous les  $(r+1) \times (r+1)$ -mineurs ;  $\text{Sym}_r E$  est l'ouvert de Zariski de  $\text{Sym}_{\leq r} E$  défini par la condition qu'au moins un  $r \times r$  mineur est inversible.

Notons que si  $K$  est un corps, l'ensemble des  $K$ -points de  $\text{Sym}_r E$  est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur  $K^e$  de rang  $r$ .

On s'intéresse particulièrement aux faisceaux libres de rang fini sur la base  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ . On garde les notations suivantes pour les chapitres qui suivent :

**Notations 2.41.** Lorsque  $V$  est un ensemble fini, on note  $Fun(V, E) = Hom(\mathcal{O}_S^V, E)$ , et  $Fun_r(V, E) = Hom_r(\mathcal{O}_S^V, E)$ .

Lorsque  $S = Spec \mathbb{Z}$ , on note  $Hom_r(e, f) = Hom_r(\mathcal{O}_S^e, \mathcal{O}_S^f)$ ,  $GL_e = Hom_e(e, e)$ ,  $Gr(r, e) = Gr(r, \mathcal{O}_S^e)$  et  $Sym_r^e = Sym_r \mathcal{O}_S^e$ .

On donne ici les résultats concernant la dénombrabilité polynomiale des schémas précédents :

**Proposition 2.42.** *On a les égalités*

$$|GL_n| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$$

$$|Gr(a, b)| = \frac{|GL_b|}{|GL_a||GL_{b-a}|q^{a(b-a)}}$$

$$|Hom_r(e, f)| = |Gr(r, e)||Gr(r, f)||GL_r|.$$

De plus, on la formule suivante due à MacWilliams :

$$|Sym_r^n| = \begin{cases} \prod_{i=1}^s \frac{q^{2i}}{q^{2i}-1} \cdot \prod_{i=0}^{2s-1} (q^{n-i} - 1) & \text{si } r = 2s \\ \prod_{i=1}^s \frac{q^{2i}}{q^{2i}-1} \cdot \prod_{i=0}^{2s} (q^{n-i} - 1) & \text{si } r = 2s + 1. \end{cases}$$

Les trois premières formules sont élémentaires, et pour la dernière on renvoie le lecteur à [MacWilliams], Theorem 2. Notons que toutes ces fonctions sont dans le système multiplicatif S.

On termine cette section en revenant sur les graphes. On sait que  $Sym_n^n = Spec(\mathbb{Z}[y]/I)_D$ , où  $I$  est l'idéal engendré par les  $y_{ij} - y_{ji}$  et  $D$  est le déterminant de la matrice  $(y_{ij})$ . On fait alors la définition suivante, dont le schéma concerné est décrit par la figure d'un graphe simple :

**Définition 2.43.** *Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple, dont on numérote les sommets par  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Pour  $1 \leq i < j \leq n$  on note  $(i, j)$  l'arête reliant les deux sommets  $v_i$  et  $v_j$ . Rappelons que  $G^0$  désigne le complémentaire de  $G$ , et on note  $\Phi(G) = E(G^0)$ , qui est l'ensemble des arêtes  $(i, j)$  qui ne sont pas dans  $G$ , et  $\Psi(G) = E(G)$  l'ensemble des arêtes  $(i, j)$  dans  $G$ . On définit  $Z_G^0$  comme le sous-schéma fermé de  $Sym_n^n$  défini par les équations  $y_{ij} = 0$ , pour tous les  $(i, j) \in \Phi(G)$ .*

Par exemple si  $G$  est un graphe discret à  $n$  sommets,  $Z_G^0$  est le schéma des matrices  $n \times n$  diagonales de rang  $n$ , donc isomorphe à  $(\mathbb{G}_m)^n$ ; si  $G = K_n$  est le graphe complet, on a  $Z_G^0 = Sym_n^n$ .

Concrètement, on a  $Z_G^0 = Spec(\mathbb{Z}[y]/J)_D$ , où  $J$  est l'idéal engendré par tous les  $y_{ij} - y_{ji}$  et tous les  $y_{ij}$ ,  $(i, j) \in \Phi(G)$ . Si  $K$  est un corps,  $Z_G^0(K)$  est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur  $K^n$ , représentées par une matrice  $M$  telles que  $M_{ij} = 0$  pour tous les  $(i, j)$  tels que  $v_i$  et  $v_j$  ne sont pas reliés.

On verra dans le prochain chapitre, via le théorème de Kirchhoff, que pour tout graphe simple  $G$  on a un isomorphisme  $Z_G^0 \simeq X_{G^*}$ , ce qui relie les deux types de schémas  $X_G$  et  $Z_G^0$ . Néanmoins, on va regarder le graphe  $G^0$ , le complément de  $G$ , à la place de  $G$  lui-même :

**Définition 2.44.** On définit  $Z_G$  comme le schéma  $Z_{G^0}$ , qui est le sous-schéma fermé de  $Sym_n^n$  défini par les équations  $y_{ij} = 0$ , pour tous les  $(i, j) \in \Psi(G)$ . On définit  $\mathbf{C}\mathbf{G}\mathbf{r}\mathbf{a}\mathbf{p}\mathbf{h}\mathbf{s}_*$  comme le sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{C}\mathbf{M}\mathbf{o}\mathbf{t}$  engendré par les fonctions de la forme  $|Z_G|$ , où  $G$  est un graphe simple.

On a cette fois  $Z_G = \text{Spec}(\mathbb{Z}[y]/J')_D$ , où  $J'$  est l'idéal engendré par tous les  $y_{ij} - y_{ji}$  et tous les  $y_{ij}$ , tels que les deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  sont liés par une arête. On verra que le schéma  $Z_G$  est étroitement lié aux schémas d'incidence, que l'on discutera en détail dans le Chapitre 4.

### 3. INTERLUDE : DEUX RÉSULTATS DE L'ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans ce chapitre on traite deux résultats de l'algèbre linéaire pure : le théorème de Kirchhoff, et la formule du nombre de prolongements des formes bilinéaires symétriques sur un corps fini. Ils peuvent se traiter indépendamment de la théorie géométrique développée au chapitre précédent.

#### 3.1. Le théorème de Kirchhoff.

Le théorème de Kirchhoff, aussi appelé Matrix-Tree Theorem, est un résultat d'algèbre linéaire qui établit un lien entre le nombre d'arbres couvrants d'un graphe avec le déterminant de la matrice laplacienne de ce graphe, que l'on définira dans la suite.

On étudie d'abord la version originale du théorème de Kirchhoff. On commence par définir la matrice laplacienne d'un graphe :

**Notations 3.1.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe, dont on numérote les sommets par  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

Soient  $1 \leq i, j \leq n$ . On note

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \text{le nombre d'arêtes reliant les sommets } v_i \text{ et } v_j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

**Définition 3.2.** On définit la **matrice laplacienne** de  $G$ ,  $L_G = (L_{ij})_{i,j}$  comme la matrice symétrique  $n \times n$  suivante :

$$L_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} & \text{si } i = j \\ -\lambda_{ij} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Et pour  $1 \leq l \leq n$ , on note  $L_G^l$  la matrice obtenue en supprimant la  $l$ -ième ligne et la  $l$ -ième colonne de  $L_G$ .

Avec cette définition, le théorème de Kirchhoff s'énonce de la façon suivante :

**Théorème 3.3 (Kirchhoff).** Pour tout  $1 \leq l \leq n$ , le déterminant de la matrice  $L_G^l$  est égal au nombre d'arbres couvrants du graphe  $G$ .

On a quelques remarques en ce qui concerne la matrice laplacienne :

**Remarque 3.4.** 1) Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a  $L_{ii} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik}$ , qui est exactement le degré du sommet  $v_i$ .

2) Pour tout graphe  $G$ , la somme des lignes (ou des colonnes) de  $L_G$  est nulle, donc on a  $\det L_G = 0$ .

3) Si le graphe  $G$  n'est pas connexe, alors quitte à réindexer les sommets, la matrice  $L$  est diagonale par bloc selon les composantes connexes de  $G$ .

Pour  $1 \leq l \leq n$ , la matrice  $L_G^l$  reste diagonale par bloc, et donc  $\det L_G^l$  est le produit des déterminants de ces blocs. Or pour chaque  $l$ , il y a au moins un bloc qui n'est pas touchée par la suppression d'une ligne et d'une colonne dans la construction de  $L_G^l$ , et donc ce bloc est égal à  $L_{G'}$  où  $G'$  est une composante connexe de  $G$ .

On conclut que si le graphe  $G$  n'est pas connexe, alors pour tout  $1 \leq l \leq n$  on a  $\det L_G^l = 0$ . Dans ce cas le théorème est trivialement vrai, vu qu'un graphe non connexe n'admet pas d'arbres couvrants.

Maintenant passons à la preuve. D'après le dernier point de la Remarque 3.4, on peut supposer le graphe  $G$  connexe.

On commence par choisir une orientation quelconque des arêtes de  $G$ , de sorte que toute arête a une tête et une queue. Si  $G$  a  $m$  arêtes  $\{e_1, \dots, e_m\}$ , on associe à cette orientation la matrice  $M$  suivante de taille  $n \times m$  :

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ est la tête de } e_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ est la queue de } e_j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice  $M$  est liée avec la matrice laplacienne de  $G$  par le lemme suivant :

**Lemme 3.5.** Si on note  ${}^tM$  la transposée de la matrice  $M$ , alors on a l'identité  $L_G = M {}^tM$ .

*Démonstration.* Notons  $M' = M {}^tM$ , qui est une matrice  $n \times n$ . Pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ , on a

$$M'_{ij} = \sum_{k=1}^m M_{ik} {}^tM_{kj} = \sum_{k=1}^m M_{ik} M_{jk}.$$

Vérifions que la matrice  $M'$  a les mêmes coefficients que la matrice  $L_G$ .

Si  $i = j$ , alors  $M'_{ii} = \sum_{k=1}^m M_{ik}^2$  est exactement le degré du sommet  $v_i$ , donc on a  $M'_{ii} = \sum_{k=1}^n \lambda_{ik} = L_{ii}$ .

Si  $i \neq j$ , alors les deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  sont distincts. Dans la sommation, un terme  $M_{ik} M_{jk}$  est non nul si et seulement l'arête  $e_k$  passe par à la fois  $v_i$  et  $v_j$ , i.e. c'est une arête reliant  $v_i$  et  $v_j$ , et alors on a  $M_{ik} M_{jk} = -1$ . Donc  $M'_{ij} = -\lambda_{ij}$  est l'opposé du nombre d'arêtes entre les sommets  $v_i$  et  $v_j$ , qui est égal à  $L_{ij}$ . □

Soit  $1 \leq l \leq n$ . Soit maintenant  $M^l$  la matrice  $(n-1) \times m$  obtenue en supprimant la  $l$ -ième ligne de  $M$ . Par le lemme précédent, on vérifie facilement l'identité  $L^l = M^l {}^t(M^l)$ .

Le graphe  $G$  est supposé connexe, donc on a  $m \geq n - 1$ . On applique la formule de Binet-Cauchy à  $L^l$ , qui donne :

$$(7) \quad \det L^l = \sum_{E_l} (\det N)^2$$

où  $E_l$  est l'ensemble des sous-matrices  $N$  de  $M^l$  de taille  $(n - 1) \times (n - 1)$ .

Il nous reste à calculer  $\det N$  pour  $N \in E_l$ . Notons qu'une telle matrice  $N$  correspond à un sous-ensemble de cardinal  $n - 1$  de l'ensemble des arêtes de  $G$ , donc définit un sous-graphe  $G_N$  de  $G$  à  $n$  sommets et  $n - 1$  arêtes.

On a le lemme suivant, résultat élégant qui relie le déterminant de la matrice  $N$  avec la nature du sous-graphe  $G_N$  :

**Lemme 3.6.** *Soit  $N$  une sous-matrice  $(n - 1) \times (n - 1)$  de  $M$ . Alors on a  $(\det N)^2 = 1$  si  $G_N$  est un arbre couvrant de  $G$ , et  $\det N = 0$  sinon.*

*Démonstration.* Le sous-graphe  $G_N$  de  $G$  a  $n$  sommets et  $n - 1$  arêtes, donc soit c'est un arbre couvrant, soit  $G_N$  contient un cycle.

Si  $G_N$  contient un cycle, alors les colonnes dans  $N$  correspondantes sont de somme nulle, donc on a  $\det N = 0$ .

Si  $G_N$  est un arbre couvrant, il contient une feuille (un sommet de degré 1). Quitte à réindexer les sommets, la matrice  $N$  peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

où la première ligne correspond à la pointe, et  $\epsilon = \pm 1$ .

Comme un arbre privé d'une feuille est encore un arbre, cette propriété nous permet de faire la récurrence. A chaque fois on multiplie par un élément  $\pm 1$ , donc le déterminant est invariant au signe près. En  $n = 1$ , la matrice est vide donc de déterminant 1 par convention, et on en déduit que  $\det N = \pm 1$ .  $\square$

D'après le lemme précédent, pour tout  $1 \leq l \leq n$ , l'ensemble des arbres couvrants de  $G$  est en bijection avec les éléments de déterminant non nul de  $E_l$ , qui sont tous de déterminant  $\pm 1$ . Avec la formule (7), on en déduit que la valeur de  $\det L^l$  est égale au nombre d'arbres couvrants du graphe  $G$ , ce qui achève la preuve du théorème de Kirchhoff.

Maintenant on étudie une généralisation du théorème de Kirchhoff, qui relie ce dernier au polynôme  $Q_G$ . On suit les mêmes étapes que précédemment. On commence par une définition généralisée de la matrice laplacienne :

**Notations 3.7.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Si  $e$  est une arête de  $G$ , on note  $x_e$  une variable formelle. Rappelons que le polynôme  $Q_G$  est défini par

$$Q_G = \sum_T \prod_{x \in T} x_e,$$

où la sommation porte sur l'ensemble des arbres couvrant de  $G$ .

On numérote les sommets par  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ , on note  $E_{ij}$  l'ensemble des arêtes reliant les deux sommets  $v_i$  et  $v_j$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on note  $E_i = \cup_{j \neq i} E_{ij}$ , qui est l'ensemble des arêtes passant par le sommet  $v_i$ .

**Définition 3.8.** On définit la matrice laplacienne de  $G$ ,  $L_G = (L_{ij})_{i,j}$  comme la matrice symétrique  $n \times n$  suivante :

$$L_{ij} = \begin{cases} \sum_{e \in E_i} x_e & \text{si } i = j \\ -\sum_{e \in E_{ij}} x_e & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Et pour  $1 \leq l \leq n$ , on note  $L_G^l$  la matrice obtenue en supprimant la  $l$ -ième ligne et la  $l$ -ième colonne de  $L_G$ .

Alors la généralisation du théorème de Kirchhoff s'énonce comme suit :

**Proposition 3.9.** Pour tout  $1 \leq l \leq n$ , on a l'égalité  $Q_G = \det L_G^l$ .

**Remarque 3.10.** 1) Si dans la Proposition 3.9 on insère la valeur  $x_e = 1$  pour tous les  $e \in E$ , alors la valeur de  $Q_G$  est exactement le nombre d'arbres couvrants de  $G$ , et c'est la version originale du théorème de Kirchhoff.

2) Comme dans la version originale du théorème, le cas d'un graphe non connexe étant trivial, on peut se restreindre aux graphes connexes.

L'énoncé de la Proposition 3.9 est une identification de deux polynômes dans  $\mathbb{Z}[x_{ij}]$ . Pour le démontrer, on peut utiliser le lemme suivant élémentaire afin de se ramener à un cas plus simple :

**Lemme 3.11.** Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes dans  $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_k]$  tels que pour tout  $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ , on a  $f(a_1, \dots, a_k) = g(a_1, \dots, a_k)$ . Alors on a  $f = g$ .

*Démonstration.* Le lemme se traduit précisément par le fait que l'ensemble  $\mathbb{N}^k$  est dense dans l'espace affine  $\mathbb{A}^k$  pour la topologie de Zariski.  $\square$

Par le lemme, il suffit de vérifier les égalités  $Q_G = \det L_G^l$  pour les variables  $x_e \in \mathbb{N}$ . Mais alors on peut voir chaque  $x_e$  comme la multiplicité de l'arête  $e$  : en remplaçant chaque arête  $e$  par  $x_e$  arêtes reliant les deux sommets de  $e$ , on obtient un graphe  $G'$ , dans lequel chaque arête est de multiplicité 1, ce qui ramène le problème au cas où chaque variable  $x_e$  vaut 1. D'après la Remarque 3.10, c'est exactement la version originale du théorème de Kirchhoff, appliquée au graphe  $G'$ . La Proposition 3.9 en découle.

Maintenant on établit une application du théorème de Kirchhoff dans notre cas de figure :

On suppose que  $G$  est un graphe simple. Rappelons que l'on a défini  $\Phi(G)$  comme les arêtes  $(i, j)$  qui ne sont pas dans  $G$ , et  $Z_G^0$  comme le sous-schéma fermé de  $Sym_n^0$  défini par les équations  $y_{ij} = 0$ , pour tous les  $(i, j) \in \Phi(G)$ . Alors on a le résultat suivant, dû à Stanley :

**Proposition 3.12.** Si  $G$  est un graphe simple, on a un isomorphisme  $X_{G^*} \simeq Z_G^0$ .

*Démonstration.* D'abord on identifie ces deux schémas. Pour le schéma  $Z_G^0$ , on l'a déjà fait : notons  $\mathbb{Z}[y]$  l'anneau engendré par les variables  $y_{ij}$ , pour  $1 \leq i, j \leq n$ . Alors on a  $Z_G^0 = \text{Spec } B$  avec  $B = (\mathbb{Z}[y]/J)_D$ , où  $J$  est l'idéal engendré par tous les  $y_{ij} - y_{ji}$  et tous les  $y_{ij}$ ,  $(i, j) \in \Phi(G)$ , et  $D$  est le déterminant de la matrice  $(y_{ij})$ .

Pour le schéma  $X_{G^*}$  ce n'est pas très compliqué non plus : notons  $v_0$  le sommet supplémentaire dans  $G^*$ , et  $\mathbb{Z}[x]$  l'anneau engendré par les variables  $x_{ij}$ , pour  $0 \leq i, j \leq n$ . Ici on identifie chaque  $x_{ij}$  avec une variable  $x_e$ , où  $e$  est une arête reliant les sommets  $v_i$  et  $v_j$ . Alors on a  $X_{G^*} = \text{Spec } A$  avec  $A = (\mathbb{Z}[x]/I)_{Q_{G^*}}$ , où  $I$  est l'idéal de  $\mathbb{Z}[x]$  engendré par les variables  $x_{ij}$  pour  $(i, j) \in \Phi(G)$ , par lequel on quotiente pour avoir le bon nombre de variables.

Maintenant soient  $\phi : \mathbb{Z}[y] \rightarrow \mathbb{Z}[x]$  l'application

$$\phi(y_{ij}) = \begin{cases} \sum_{k < i} x_{ki} + \sum_{i < k} x_{ik} & \text{si } i = j \\ -x_{ij} & \text{si } i < j \\ -x_{ji} & \text{si } j < i, \end{cases}$$

et  $\psi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[y]$  l'application

$$\psi(x_{ij}) = \begin{cases} \sum_k y_{jk} & \text{si } i = 0 \\ -y_{ij} & \text{si } i \neq 0. \end{cases}$$

En appliquant la Proposition 3.9 au graphe  $G^*$  on a  $\phi(Q_{G^*}) = D$ . On peut vérifier que  $\phi$  et  $\psi$  induisent deux morphismes d'anneaux l'un l'inverse de l'autre entre les anneaux  $A$  et  $B$ . Par conséquent on a un isomorphisme  $X_{G^*} \simeq Z_G^0$ .  $\square$

**Exemple 3.13.** Prenons un exemple simple pour voir :  $G$  est un graphe à deux sommets  $\{v_1, v_2\}$  reliés par une arête. Alors  $G^*$  est un triangle, et on a  $Q_{G^*} = x_{01}x_{02} + x_{01}x_{12} + x_{02}x_{12}$ . On a

$$A = (\mathbb{Z}[x_{01}, x_{02}, x_{12}])_{x_{01}x_{02} + x_{01}x_{12} + x_{02}x_{12}}.$$

De même on a

$$B = (\mathbb{Z}[y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}]/(y_{12} - y_{21}))_{y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}} = (\mathbb{Z}[y_{11}, y_{12}, y_{22}])_{y_{11}y_{22} - y_{12}^2}.$$

L'application  $\phi$  est telle que  $\phi(x_{01}) = y_{11} + y_{12}$ ,  $\phi(x_{02}) = y_{12} + y_{22}$  et  $\phi(x_{12}) = -y_{12}$ ; on voit facilement que c'est un isomorphisme entre les anneaux  $\mathbb{Z}[x_{01}, x_{02}, x_{12}]$  et  $\mathbb{Z}[y_{11}, y_{12}, y_{22}]$ , qui envoie le polynôme  $x_{01}x_{02} + x_{01}x_{12} + x_{02}x_{12}$  sur  $y_{11}y_{22} - y_{12}^2$ . Donc  $\phi$  induit un isomorphisme d'anneaux entre  $A$  et  $B$ . De même on vérifie que  $\psi$  induit l'isomorphisme inverse.

### 3.2. Prolongements de formes bilinéaires symétriques.

Dans cette section on étudie le nombre de prolongements d'une forme bilinéaire symétrique de rang  $r_1$  en une forme bilinéaire symétrique de rang  $r_2$ . On note  $q$  un élément dans  $\mathcal{Q}$ .

**Définition 3.14.** Soit  $Q$  une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{F}_q^{d_1}$  de rang  $r_1$ . On note  $C_Q(d_2, r_2, d_1, r_1)$  le nombre de prolongements de  $Q$  en une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{F}_q^{d_2}$  de rang  $r_2$ .



Dans le cas  $d_2 = d_1 + 1$ , on a le résultat suivant d'algèbre linéaire, qui permet calculer le nombre  $C_Q(d_2, r_2, d_1, r_1)$  par récurrence :

**Proposition 3.15.** *On a l'expression explicite suivante du nombre  $C_Q(d_1 + 1, r_2, d_1, r_1)$  :*

$$C_Q(d_1 + 1, r_2, d_1, r_1) = \begin{cases} q^{r_1} & \text{si } r_2 = r_1 \\ q^{r_1+1} - q^{r_1} & \text{si } r_2 = r_1 + 1 \\ q^{d_1+1} - q^{r_1+1} & \text{si } r_2 = r_1 + 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

*Démonstration.* Soit  $Q_1$  une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{F}_q^{d_1+1}$  qui prolonge  $Q$ . Alors par décomposition orthogonale, dans une base appropriée, la matrice de  $Q_1$  s'écrit de la forme :

$$M(Q_1) = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & \cdots & y_{d_1} \\ y_1 & & & \\ \vdots & & M(Q) & \\ y_{d_1} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & \mathbf{y} \\ {}^t\mathbf{y} & M(Q) \end{pmatrix}$$

où  $M(Q)$  est la matrice de  $Q$  dans le sous-espace  $\mathbb{F}_q^{d_1}$ , qui est de rang  $r_1$  par hypothèse. Les matrices  $M(Q_1)$  et  $M(Q)$  sont symétriques car  $Q_1$  et  $Q$  sont symétriques. Calculons le rang de la forme  $Q_1$ .

Il y a deux cas : si le vecteur  $\mathbf{y}$  est linéairement indépendant des lignes de la matrice  $M(Q)$ , alors la matrice  $\begin{pmatrix} y_0 & \mathbf{y} \\ {}^t\mathbf{y} & M(Q) \end{pmatrix}$  est de rang  $r_1 + 1$ , et quelque soit la valeur de  $y_0$ , le vecteur  $(y_0 \ \mathbf{y})$  est linéairement indépendant des lignes de  $\begin{pmatrix} y_0 & \mathbf{y} \\ {}^t\mathbf{y} & M(Q) \end{pmatrix}$ . Par conséquent, la forme  $Q_1$  est de rang  $r_1 + 2$ . Calculons le nombre de tels prolongements  $Q_1$  : il y a  $q^{d_1}$  choix du vecteur  $\mathbf{y}$  au total, dont  $q^{r_1}$  sont tels que  $\mathbf{y}$  est combinaison linéaire des lignes de  $M(Q)$  ; le nombre  $y_0$  peut être choisi arbitrairement. Il y a donc  $q(q^{d_1} - q^{r_1})$  de telles  $Q_1$ .

En revanche, si le vecteur  $\mathbf{y}$  est combinaison linéaire des lignes de la matrice  $M(Q)$ , avec  $\mathbf{y} = \lambda M(Q)$ , où  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{d_1})$ , alors la matrice  $\begin{pmatrix} y_0 & \mathbf{y} \\ {}^t\mathbf{y} & M(Q) \end{pmatrix}$  est de rang  $r_1$ . Dans ce cas le rang de  $Q_1$  dépend de la valeur de  $y_0$  :

Si on a égalité  $y_0 = \lambda {}^t\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{d_1} \lambda_i y_i$ , alors le vecteur  $(y_0 \ \mathbf{y})$  est combinaison linéaire des lignes de  $\begin{pmatrix} y_0 & \mathbf{y} \\ {}^t\mathbf{y} & M(Q) \end{pmatrix}$ , et alors la forme  $Q_1$  est de rang  $r_1$ . Le nombre de tels prolongements  $Q_1$  est le nombre de choix du vecteur  $\lambda$ , qui est donc égal à  $q^r$ .

Si on a  $y_0 \neq \lambda {}^t\mathbf{y}$ , alors la forme  $Q_1$  est de rang  $r_1 + 1$ . Le nombre de tels prolongements  $Q_1$  est le nombre de choix du vecteur  $\lambda$ , multiplié par le nombre du choix de  $y_0$ , donc vaut  $(q - 1)q^r$ .

Finalement, on obtient le résultat en combinant tous ces 3 cas. □

En conséquence, le nombre  $C_Q(d_1 + 1, r_2, d_1, r_1)$  ne dépend que des paramètres  $d_1, r_2$  et  $r_1$ . Par récurrence sur  $d_2 - d_1$ , on peut montrer que le nombre  $C_Q(d_2, r_2, d_1, r_1)$  ne dépend que des paramètres  $d_2, r_2, d_1$  et  $r_1$ , et non pas de la forme  $Q$  choisie. On note alors  $C(d_2, r_2, d_1, r_1)(q) = C_Q(d_2, r_2, d_1, r_1)$ .

Il est facile de vérifier la relation suivante :

$$C(d_2, r_2, d_1, r_1)(q) = \sum_{j=0}^2 C(d_2, r_2, d_1 + 1, r_1 + j)(q)C(d_1 + 1, r_1 + j, d_1, r_1)(q).$$

On a le corollaire suivant, qui se démontre par récurrence et à l'aide des formules précédentes :

**Corollaire 3.16.** 1) La fonction  $q \mapsto C(d_2, r_2, d_1, r_1)(q)$  est polynomiale.

2) Si  $C(d_2, r_2, d_1, r_1)(q) \neq 0$ , alors on a  $d_2 \geq r_2$ ,  $d_1 \geq r_1$  et  $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq r_1 + 2(d_2 - d_1)$ .

#### 4. LES SCHÉMAS D'INCIDENCE

Comme on l'a déjà mentionné dans l'introduction, les schémas d'incidence jouent un rôle intermédiaire entre les schémas  $Z_G$  et la théorie des matroïdes. Dans ce chapitre on donne d'abord leurs définitions, avant d'établir un certain nombre de relations entre leurs fonctions de comptage, appelées formules de réduction, et enfin on verra que le  $\mathbf{R}$ -module engendré par ces fonctions de comptage est inclus dans  $\mathbf{CGraphs}_*$ , le  $\mathbf{R}$ -module engendré par les fonctions  $|Z_G|$ .

A partir de ce chapitre, on travaille uniquement sur des graphes simples.

##### 4.1. Définitions et propriétés élémentaires.

Dans cette section on note  $G$  un graphe simple et  $n$  le nombre de sommets de  $G$ .

On définit d'abord les schémas d'incidence. Ce sont des objets géométriques définis par une stratification par le rang, et dont la forme ressemble à la matrice d'incidence d'un graphe. La définition se fait sur un schéma de base nothérien  $S$  quelconque, mais notre intérêt principal est le cas  $S = \text{Spec } \mathbb{Z}$ .<sup>9</sup>

**Définition 4.1.** Soient  $S$  un schéma nothérien et  $W$  un  $\mathcal{O}_S$ -module localement libre. Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple, dont on numérote les sommets par  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Pour  $1 \leq i < j \leq n$  on note  $(i, j)$  l'arête reliant les deux sommets  $v_i$  et  $v_j$ . On note  $\Psi(G) = E(G)$  l'ensemble des arêtes  $(i, j)$  dans  $G$ .

On définit  $A_G(W)$  comme le sous-schéma fermé du schéma  $\text{Sym } W \times \text{Fun}(V, W)$  qui en représente le sous-foncteur  $T \mapsto \{(Q, f) \in \text{Sym } W_T \times \text{Fun}(V, W_T) \mid Q(f(v_i), f(v_j)) = 0 \text{ si } (i, j) \in \Psi(G)\}$ .

On définit aussi  $A_G(W, r, k) = A_G(W) \cap (\text{Sym}_r(W) \times \text{Fun}_k(V, W))$  par l'intersection schéma-théorique, appelés les **schémas d'incidence**.

Lorsque  $S = \text{Spec } \mathbb{Z}$ , on note  $A_G(s) = A_G(\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^s)$  et  $A_G(s, r, k) = A_G(\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^s, r, k)$ .

**Remarque 4.2.** Explicitement, si  $K$  est un corps,  $A_G(s)(K)$  est l'ensemble des couples  $(Q, f)$ , où  $Q$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $K^s$  et  $f : V \rightarrow K^s$  est une application, tels que  $Q(f(v_i), f(v_j)) = 0$  si  $v_i$  est relié à  $v_j$  dans  $G$ ;  $A_G(s, r, k)(K)$  est l'ensemble des couples  $(Q, f) \in A_G(s)(K)$ , où de plus  $Q$  est de rang  $r$  et  $f$  de rang  $k$ .

9. En fait la définition générale peut servir lorsqu'on travaille dans  $\text{GeoMot}$ .

On voit facilement que les schémas  $A_G(s, r, k)$  forment une stratification de  $A_G(s)$  par les rangs de  $Q$  et  $f$ .

Le schéma  $A_G(s, r, k)$  est vide sauf si  $0 \leq k \leq n$  et  $0 \leq r, k \leq s$ . On a par exemple  $A_G(s, r, 0) = \text{Sym}_r^s$  et  $A_G(s, 0, k) = \text{Fun}_k(V, \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^s)$ . Par conséquent les fonctions de comptage  $|A_G(s, r, 0)|$  et  $|A_G(s, 0, k)|$  sont dans  $\mathbb{Z}[q]$ .

On travaille sur les  $A_G(s, r, k)$  dans la suite de ce chapitre, et le schéma de base sera désormais pris  $S = \text{Spec } \mathbb{Z}$ .

Rappelons qu'on a défini  $Z_G = Z_{G^0}^0$ , qui est le sous-schéma fermé de  $\text{Sym}_n^n$  défini par les équations  $y_{ij} = 0$  pour tout  $(i, j) \in \Psi(G)$ . Alors le schéma  $A_G(n, n, n)$  est lié à  $Z_G$  via le lemme suivant :

**Lemme 4.3.** *On a un isomorphisme  $A_G(n, n, n) \simeq Z_G \times GL_n$ .*

*Démonstration.* On a  $GL_n = \text{Fun}_n(V, \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}^n)$ . On a une application  $(Q, f) \mapsto (f^t Q f, f)$  de  $A_G(n, n, n)$  vers  $Z_G \times GL_n$ , où  $f^t$  est la transposée de  $f$ , qui est un isomorphisme.  $\square$

Rappelons que l'anneau  $\mathbf{R}$  est la localisation de l'anneau  $\mathbb{Z}[q]$  par rapport aux éléments  $q$  et les  $q^k - 1$ , et  $\mathbf{CGraphs}_*$  est le sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{CMot}$  engendré par les fonctions  $|Z_G|$ . En conséquence, le Lemme 4.3 implique qu'il est égal au  $\mathbf{R}$ -module engendré par les fonctions de la forme  $|A_G(n, n, n)|$ .

Maintenant on définit 3 types de schémas spéciaux : pour  $s \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\begin{aligned} K_G(s) &= A_G(s, s, s), \\ J_G(s) &= \bigcup_{k=0}^s A_G(s, s, k), \\ H_G(s) &= A_G(n, s, n). \end{aligned}$$

Les schémas  $K_G$  et  $H_G$  sont auxiliaires, et on s'intéresse surtout au schéma  $J_G$ , qui s'interprète comme suit : si  $K$  est un corps,  $J_G(s)(K)$  est l'ensemble des  $(Q, f) \in A_G(s)(K)$ , avec  $Q$  une forme bilinéaire symétrique sur  $K^s$  non dégénérée. Le but principal de ce chapitre est d'obtenir la proposition suivante :

**Proposition 4.4.** *Pour tout graphe  $G$  et tout  $s \in \mathbb{N}$ , la fonction  $|J_G(s)|$  est dans  $\mathbf{CGraphs}_*$ .*

Ce que l'on va faire est de démontrer un résultat plus général. Pour cela on introduit la notion du module d'un graphe :

**Définition 4.5.** *Soit  $G$  un graphe et  $t \in \mathbb{N}$ . On définit  $M(G)$ , le **module du graphe**  $G$ , comme le  $\mathbf{R}$ -module engendré par les fonctions  $|A_G(s, r, k)|$ , pour  $s, r, k \in \mathbb{N}$ .*

Alors on voit facilement que la Proposition 4.4 est une conséquence du résultat suivant :

**Proposition 4.6.** *Pour tout graphe  $G$ , le module  $M(G)$  est inclus dans  $\mathbf{CGraphs}_*$ .*

Le reste de ce chapitre sera consacré à la démonstration de la Proposition 4.6.

#### 4.2. Formules de réduction.

On note  $G$  un graphe fini dont  $V$  est l'ensemble des sommets. Dans cette section nous étudions le lien entre les fonctions de comptage des schémas  $A_G(s, r, k)$ , lorsque les paramètres  $s$ ,  $r$  et  $k$  varient. La méthode principale consiste à trouver des stratifications d'un schéma puis sommer les strates. On établira ainsi un certain nombre d'équations appelées formules de réduction.

Comme on va établir des égalités entre les fonctions de comptage des schémas, il sera de même de démontrer les égalités entre les cardinaux de l'ensemble des  $\mathbb{F}_q$ -points de ces schémas pour tout  $q \in \mathcal{Q}$ . On notera dans la suite  $q$  un élément dans  $\mathcal{Q}$ .

Soit  $W = \mathbb{F}_q^s$ . Par définition, on sait que  $A_G(s, r, k)(\mathbb{F}_q)$  est l'ensemble des couples  $(Q, f)$ , où  $Q$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $W$  de rang  $r$  et  $f$  est une fonction de  $V$  vers  $W$  telle que  $\langle f(V) \rangle$  est de dimension  $r$ , qui vérifient la condition  $Q(f(v), f(w)) = 0$  si  $v$  et  $w$  sont deux sommets connectés dans  $G$ .

Rappelons que  $C(d_2, r_2, d_1, r_1)(q)$  est le nombre de prolongements d'une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{F}_q^{d_1}$  de rang  $r_1$  en une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{F}_q^{d_2}$  de rang  $r_2$ , qui ne dépend pas de la forme choisie et est un polynôme en  $q$ .

On a d'abord la formule suivante, qui relie les  $|A_G(s, r, k)|$  aux  $|A_G(k, j, k)|$  :

**Proposition 4.7.** *On a l'égalité*

$$|A_G(s, r, k)| = |Gr(k, s)| \sum_{j=0}^k C(s, r, k, j) |A_G(k, j, k)|.$$

*Démonstration.* On considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : A_G(s, r, k)(\mathbb{F}_q) &\rightarrow Gr(k, s)(\mathbb{F}_q) \\ (Q, f) &\mapsto \langle f(V) \rangle. \end{aligned}$$

Soit  $U$  un sous-espace de  $W$  de dimension  $k$ . On note  $A_G(s, r, U)$  la fibre de  $\phi$  au-dessus de  $U$ , et on a  $A_G(s, r, U) = \{(Q, f) \in A_G(s, r, k)(\mathbb{F}_q) \mid \langle f(V) \rangle = U\}$ .

Comme le groupe  $GL_s(\mathbb{F}_q)$  agit transitivement sur  $Gr(k, s)(\mathbb{F}_q)$ , on sait que toutes les fibres ont le même cardinal. On a alors

$$(8) \quad \#A_G(s, r, k)(\mathbb{F}_q) = \#Gr(k, s)(\mathbb{F}_q) \#A_G(s, r, U).$$

Calculons maintenant le cardinal de  $A_G(s, r, U)$ . Soit  $A_G(s, r, U, j) = \{(Q, f) \in A_G(s, r, U) \mid Q|_U \text{ est de rang } j\}$ . Pour les  $0 \leq j \leq s$ , les ensembles  $A_G(s, r, U, j)$  forment une partition de l'ensemble  $A_G(s, r, U)$ . Et alors

$$(9) \quad \#A_G(s, r, U) = \sum_{j=0}^k \#A_G(s, r, U, j).$$

On a cette fois une application induite par la restriction sur le sous-espace  $U$  :

$$\begin{aligned} \psi : A_G(s, r, U, j) &\rightarrow A_G(k, j, k)(\mathbb{F}_q) \\ (Q, f) &\mapsto (Q|_U, f). \end{aligned}$$

La fibre de l'application  $\psi$  au-dessus de n'importe quel point est de cardinal  $C(s, r, k, j)(q)$ , et alors on a

$$(10) \quad \#A_G(s, r, U, j) = C(s, r, k, j) \#A_G(k, j, k)(\mathbb{F}_q).$$

La proposition découle alors des équations (8), (9) et (10).  $\square$

**Remarque 4.8.** 1) Comme le nombre  $C(s, r, k, j)$  est nul si  $j > r$ , la sommation est portée sur les indices vérifiant la condition  $j \leq \min(k, r)$ .

2) Le point clé dans la preuve précédente est la stratification par le rang de  $Q|_U$ . Dans le résultat suivant on verra une autre stratification par le rang de  $f$ .

On a une autre formule de réduction qui relie les  $|A_G(s, r, k)|$  aux  $|A_G(r, r, k)|$  :

**Proposition 4.9.** *On a l'égalité*

$$|A_G(s, r, k)| = |Gr(r, s)| \sum_{l=0}^r q^{l(s-r)} |Hom_{k-l}(n-l, s-r)| |A_G(r, r, l)|.$$

*Démonstration.* On considère l'application suivante

$$\begin{aligned} \xi : A_G(s, r, k)(\mathbb{F}_q) &\rightarrow Gr(s-r, s)(\mathbb{F}_q) \\ (Q, f) &\mapsto Ker(Q). \end{aligned}$$

Soit  $U$  un sous-espace de  $W$  de dimension  $s-r$ . On note  $A_G(s, r, k)_U$  la fibre de  $\xi$  au-dessus de  $U$ , et on a  $A_G(s, r, k)_U = \{(Q, f) \in A_G(s, r, k)(\mathbb{F}_q) \mid Q|_U = 0\}$ .

Comme le groupe  $GL_s(\mathbb{F}_q)$  agit transitivement sur  $Gr(s-r, s)(\mathbb{F}_q)$ , on sait que toutes les fibres ont le même cardinal. On a alors

$$(11) \quad \#A_G(s, r, k)(\mathbb{F}_q) = \#Gr(s-r, s)(\mathbb{F}_q) \#A_G(s, r, k)_U.$$

Calculons maintenant le cardinal de  $A_G(s, r, k)_U$ . Soit  $T = W/U$  l'espace quotient, avec l'application canonique  $\pi : W \rightarrow T$ . Soit  $Q$  une forme bilinéaire symétrique sur  $W$  de noyau  $U$ , alors  $Q$  se réduit en une forme bilinéaire symétrique non dégénérée  $\bar{Q}$  sur  $T$ . L'application  $Q \mapsto \bar{Q}$  est une bijection entre l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur  $W$  de noyau  $U$  et l'ensemble des formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur  $T$ .

Soit  $A_G(s, r, k)_{U,l} = \{(Q, f) \in A_G(s, r, k)(\mathbb{F}_q) \mid (\pi \circ f)(V) \text{ est de dimension } l\}$ . Pour  $0 \leq l \leq r$ , les  $A_G(s, r, k)_{U,l}$  forment une partition de l'ensemble  $A_G(s, r, k)_U$ . Et alors

$$(12) \quad \#A_G(s, r, k)_U = \sum_{l=0}^r \#A_G(s, r, k)_{U,l}.$$

On a l'application de réduction suivante :

$$\begin{aligned} \chi : A_G(s, r, k)_{U,l} &\rightarrow A_G(r, r, l)(\mathbb{F}_q) \\ (Q, f) &\mapsto (\bar{Q}, \pi \circ f). \end{aligned}$$

Soit  $(\bar{Q}, g) \in A_G(r, r, l)(\mathbb{F}_q)$ . Comme la forme  $Q$  est uniquement déterminée par  $\bar{Q}$ , la fibre de  $\chi$  au-dessus de  $(\bar{Q}, g)$  est en bijection avec l'ensemble  $A = \{f : V \rightarrow W \mid \pi \circ f = g \text{ et } \dim\langle f(V) \rangle = k\}$ .

Les  $f \in A$  peuvent s'écrire en une matrice  $s * n$  sous la forme :

$$\begin{matrix} & l & n-l \\ r & \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ s-r & \end{matrix}$$

où les  $r$  premières lignes (i.e.  $A$  et  $B$ ) décrivent la fonction  $g$  avec  $A$  de rang  $l$ , et la condition  $\dim\langle f(V) \rangle = k$  est équivalente au fait que la matrice  $D$  est de rang  $k-l$ . Il y a  $q^{l(s-r)}$  choix de  $C$ , et  $D$  peut être choisie dans  $\text{Hom}_{k-l}(n-l, s-r)(\mathbb{F}_q)$ . Donc  $A$  est de cardinal  $q^{l(s-r)} \#\text{Hom}_{k-l}(n-l, s-r)(\mathbb{F}_q)$ . Et alors on a

$$(13) \quad \#A_G(s, r, k)_{U,l} = q^{l(s-r)} \#\text{Hom}_{k-l}(n-l, s-r)(\mathbb{F}_q) \#A_G(r, r, l)(\mathbb{F}_q).$$

La proposition découle alors des équations (11), (12) et (13).  $\square$

**Corollaire 4.10.** *On a l'égalité*

$$|A_G(s, r, s)| = q^{r(s-r)} |Gr(r, s)| |\text{Hom}_{s-r}(n-r, s-r)| |A_G(r, r, r)|$$

*Démonstration.* Dans la Proposition 4.9, on prend  $k = s$ . Dans la sommation de la formule, pour avoir un terme non nul, il faut  $l \leq r$  et  $s-l = k-l \leq s-r$ , et alors forcément  $l = r$ . Le résultat en découle.  $\square$

Rappelons que  $DG$  est le graphe obtenu en rajoutant un sommet disjoint à  $G$ . On a une dernière formule de réduction, qui relie les schémas d'incidence associés à  $G$  avec ceux associés à  $DG$  :

**Proposition 4.11.** *On a l'égalité*

$$|A_{DG}(s, r, k)| = q^k |A_G(s, r, k)| + (q^s - q^{k-1}) |A_G(s, r, k-1)|.$$

*Démonstration.* Notons  $v$  le sommet rajouté à  $G$  pour construire  $DG$ . On a  $V(DG) = V \cup \{v\}$ .

Soit  $(Q, f) \in A_{DG}(s, r, k)(\mathbb{F}_q)$ . Alors  $\dim\langle f(V(DG)) \rangle = k$ , donc  $\dim\langle f(V) \rangle$  vaut  $k$  ou  $k-1$ . On obtient facilement le résultat en faisant le comptage dans les deux cas.  $\square$

### 4.3. Relations entre $M(G)$ et les schémas $K_G(s)$ , $J_G(s)$ et $H_G(s)$ .

Soit  $G$  un graphe. On rappelle que par définition,  $K_G(s) = A_G(s, s, s)$ ,  $J_G(s) = \cup_{k=0}^s A_G(s, s, k)$  et  $H_G(s) = A_G(n, s, n)$ , et  $M(G)$  est le  $\mathbf{R}$ -module engendré par les fonctions de la forme  $|A_G(s, r, k)|$ . Dans cette section on va appliquer les formules de réduction : on montre d'abord que la fonction de comptage de chacun de ces 3 types de schémas engendre  $M(G)$ , ce qui légitimise un interchangement des 3 ; par un raisonnement par récurrence, on montre dans la Proposition 4.20 que la fonction de comptage de tout schéma d'incidence est une combinaison linéaire des éléments  $|Z_G|, |Z_{DG}|, \dots$ .

On commence par définir une filtration sur  $M(G)$  :

**Définition 4.12.** Soit  $t \in \mathbb{N}$ . On note  $M(G)_t$  le sous- $\mathbf{R}$ -module de  $M(G)$  engendré par les fonctions de la forme  $|A_G(s, r, k)|$ , avec  $s \leq t$  et pour tout  $(r, k)$ . On dit que les éléments dans  $M(G)_t$  sont de **niveau**  $\leq t$ .

Par cette définition, on a une filtration de sous- $\mathbf{R}$ -modules de  $M(G)$  :

$$\mathbf{R} = M(G)_0 \subset M(G)_1 \subset \cdots \subset M(G)_t \subset \cdots .$$

Mais on peut dire mieux sur cette filtration : il résulte de la Proposition 4.7 que  $|A_G(s, r, k)|$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{Z}[q]$  des éléments de la forme  $|A_G(k, j, k)|$ , et donc on a  $|A_G(s, r, k)| \in M(G)_k$ , i.e. la fonction  $|A_G(s, r, k)|$  est de niveau  $\leq k$ . Or le schéma  $A_G(s, r, k)$  est vide pour  $k > n$ , donc tout élément de  $M(G)$  est de niveau  $\leq n$ , i.e. la filtration précédente est finie, et on a

$$\mathbf{R} = M(G)_0 \subset M(G)_1 \subset \cdots \subset M(G)_n = M(G).$$

On peut encore dire mieux, avec le lemme suivante :

**Lemme 4.13.** On a  $|A_G(s, r, k)| \in M(G)_d$ , avec  $d = \min(s, r, k)$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $|A_G(s, r, k)| \in M(G)_r$ . Par la Proposition 4.7, la fonction  $|A_G(s, r, k)|$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{Z}[q]$  des éléments de la forme  $|A_G(k, j, k)|$ , avec  $j \leq r$ . Et par le Corollaire 4.10, on a  $|A_G(k, j, k)| = \sigma_j |A_G(j, j, j)|$ , où  $\sigma_j \in \mathbb{Z}[q]$ . Le résultat en découle.  $\square$

Comme  $A_G(j, j, j) = K_G(j)$ , le même argument montre aussi un autre résultat :

**Proposition 4.14.** Le module  $M(G)_t$  est égal au  $\mathbf{R}$ -module engendré par les  $|K_G(s)|$ , pour les  $s \leq t$ .

En particulier, le module  $M(G)$  est engendré par les  $|K_G(s)|$ . En fait, le module  $M(G)$  est aussi engendré par les  $|J_G(s)|$  et respectivement par les  $|H_G(s)|$  :

**Proposition 4.15.** a) Le module  $M(G)_t$  est égal au  $\mathbf{R}$ -module engendré par les  $|J_G(s)|$ , pour les  $s \leq t$ .

b) Le module  $M(G)_t$  est égal au  $\mathbf{R}$ -module engendré par les  $|H_G(s)|$ , pour les  $s \leq t$ .

*Démonstration.* a) On sait que  $J_G(s) = K_G(s) \cup (\cup_{k=0}^{s-1} A_G(s, s, k))$ , où la réunion est disjointe. Par la Proposition 4.14, on sait que  $|J_G(s)| \equiv |K_G(s)|$  modulo  $M(G)_{s-1}$ . Le résultat se montre alors par récurrence sur le paramètre  $s$ .

b) Par le Corollaire 4.10, on a  $|H_G(s)| = \sigma |K_G(s)|$ , où  $\sigma \in \mathbf{S}$ . Le résultat découle alors de la Proposition 4.14.  $\square$

En particulier, le  $\mathbf{R}$ -module  $M(G)$  est engendré respectivement par les  $|J_G(s)|$  et les  $|H_G(s)|$ .

On a aussi les deux lemmes suivants, qui donne les relations qui permettent de relier respectivement les schémas  $J_G(s)$  et  $H_G(s)$  d'un graphe  $G$  avec les mêmes schémas définis pour le graphe  $DG$ .

**Lemme 4.16.** *Soit  $G$  un graphe. On a l'égalité*

$$|J_{DG}(s)| = q^s |J_G(s)|$$

*Démonstration.* On a l'application suivante, qui prend la restriction d'une fonction  $f$  sur  $V(G)$  :

$$\begin{aligned} J_{DG}(s)(\mathbb{F}_q) &\rightarrow J_G(s)(\mathbb{F}_q) \\ (Q, f) &\mapsto (Q, f|_{V(G)}). \end{aligned}$$

Comme le graphe  $DG$  n'est rien d'autre que la réunion de  $G$  et d'un sommet disjoint, il est facile de voir que la fibre au-dessus d'un point quelconque est isomorphe à  $\mathbb{F}_q^s$ , et le résultat en découle. □

En corollaire du lemme précédent, il se trouve que pour tout graphe  $G$ , les graphes  $G$  et  $DG$  engendrent le même module :

**Corollaire 4.17.** *Pour tout graphe  $G$  on a l'égalité  $M(DG) = M(G)$ .*

*Démonstration.* D'après la Proposition 4.15, les  $|J_G(s)|$  engendrent  $M(G)$ . D'après le Lemme 4.16, les fonctions  $|J_G(s)|$  et  $|J_{DG}(s)|$  diffèrent d'un élément dans le système multiplicatif  $S$ . Donc on a  $M(DG) = M(G)$ . □

**Lemme 4.18.** *Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets. Soit  $r$  tel que  $r \leq n + 1$ . Posons*

$$\begin{aligned} a_G(r) &= q^{n+r}(q^{n+1} - 1), \\ b_G(r) &= q^{n+r-1}(q^{n+1} - 1)(q - 1), \\ c_G(r) &= q^n(q^{n+1} - 1)(q^{n+1} - q^{r-1}). \end{aligned}$$

*Alors on a l'égalité*

$$|H_{DG}(r)| = a_G(r)|H_G(r)| + b_G(r)|H_G(r-1)| + c_G(r)|H_G(r-2)|.$$

*Démonstration.* On insère la valeur  $s = k = n + 1$  dans la Proposition 4.11, ce qui donne la formule

$$|H_{DG}(r)| = |A_{DG}(n+1, r, n+1)| = (q^{n+1} - q^n)|A_G(n+1, r, n)|.$$

Calculons alors le terme  $|A_G(n+1, r, n)|$ . On insère la valeur  $s = n + 1$ ,  $k = n$  dans la Proposition 4.7, ce qui donne

$$|A_G(n+1, r, n)| = |Gr(n, n+1)| \sum_{j=0}^n C(n+1, r, n, j) |A_G(n, j, n)|.$$

On sait que  $|A_G(n+1, r, n)| = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ . D'autre part, d'après la Proposition 3.15, on a  $C(n+1, r, n, j) = 0$  sauf pour  $j = r$ ,  $r-1$  ou  $r-2$ . Donc la formule précédente se



réécrit :

$$\begin{aligned} |A_G(n+1, r, n)| &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} (q^r |A_G(n, r, n)| + (q^r - q^{r-1}) |A_G(n, r-1, n)| \\ &\quad + (q^{n+1} - q^{r-1}) |A_G(n, r-2, n)|) \\ &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} (q^r |H_G(r)| + (q^r - q^{r-1}) |H_G(r-1)| + (q^{n+1} - q^{r-1}) |H_G(r-2)|). \end{aligned}$$

Le résultat découle facilement des formules précédentes.  $\square$

**Remarque 4.19.** Les polynômes  $a_G(r)$ ,  $b_G(r)$  et  $c_G(r)$  sont non-nuls puisque  $r \leq n+1$ , et alors ils sont dans le système multiplicatif  $\mathbf{S}$ .

Maintenant on est prêt à démontrer le théorème principal de ce chapitre :

**Proposition 4.20.** *Pour tout graphe  $G$ , on note  $N(G)$  le  $\mathbf{R}$ -module engendré par les fonctions  $|Z_{D^k G}|$  pour  $k \geq 0$ . Alors on a l'égalité  $N(G) = M(G)$ .*

*Démonstration.* Dans la preuve on ne considère pas un graphe fixé au préalable et on va faire varier le graphe, et donc on note  $n_G$  le nombre de sommets d'un graphe  $G$  par convention.

Montrons d'abord l'inclusion  $N(G) \subset M(G)$ . Rappelons que le Lemme 4.3 dit qu'il existe un isomorphisme  $K_G(n_G) = A_G(n_G, n_G, n_G) \simeq Z_G \times GL_{n_G}$ . Donc on a  $|Z_G| \in M(G)$  pour tout graphe  $G$ . Et par le Corollaire 4.17, on a  $M(G) = M(DG) = \dots = M(D^k G)$ , et donc on a  $|Z_{D^k G}| \in M(D^k G) = M(G)$  pour tout  $k \geq 0$ . D'où l'inclusion  $N(G) \subset M(G)$ .

L'inclusion inverse  $M(G) \subset N(G)$  est plus subtile. D'après la Proposition 4.15, comme les  $|H_G(s)|$  engendrent  $M(G)$ , il suffit de montrer que pour tout  $s$ , on a  $|H_G(s)| \in N(G)$ . On va montrer l'assertion suivante, qui permet de conclure : soit  $j \in \mathbb{N}$ , alors pour tout graphe  $G$  et tout  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $0 \leq i \leq j$ , on a  $|H_G(n_G - i)| \in N(G)$ .

On procède par récurrence sur l'entier  $j$ . Si  $j = 0$ , on a  $i = 0$  aussi. Mais on sait que  $H_G(n_G) = K_G(n_G)$  et donc  $|H_G(n_G)| \in N(G)$ . Donc l'assertion est vraie pour  $j = 0$ .

Supposons l'assertion vraie pour  $j$ . On insère la valeur  $r = n_G - (j - 1)$  dans le Lemme 4.18, et on a

$$|H_{DG}(n_G - (j-1))| = a_G(r) |H_G(n_G - (j-1))| + b_G(r) |H_G(n_G - j)| + c_G(r) |H_G(n_G - (j+1))|.$$

Par hypothèse de récurrence, les trois premiers termes sont dans  $N(G)$ , donc le dernier aussi. On sait que  $c_G(r) \in \mathbf{S}$  est inversible, et donc  $|H_G(n_G - (j+1))| \in N(G)$ , pour tout graphe  $G$ . Par récurrence, l'assertion est vraie pour tout  $a$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

Par définition,  $\mathbf{CGraphs}_*$  est le  $\mathbf{R}$ -module engendré par les fonctions  $|Z_G|$  pour tous les graphes  $G$ . Donc  $N(G) \subset \mathbf{CGraphs}_*$ , et avec la Proposition 4.20 on a ainsi démontré la Proposition 4.6, qui implique la Proposition 4.4, résultat dont on se servira plus tard.

**Remarque 4.21.** Résumons ce qu'on a obtenu au niveau effectif :

Soit  $G$  un graphe à  $n$  sommets. D'après la Proposition 4.15, pour tout  $0 \leq t \leq n$ , la fonction  $|J_G(s)|$  est combinaison à coefficients dans  $\mathbf{R}$  des fonctions  $|H_G(s)|, |H_G(s-1)|, \dots, |H_G(0)|$ . Or la démonstration de la Proposition 4.20 montre par récurrence que, pour tout  $0 \leq t \leq n_G$ , la fonction  $|H_G(t)|$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbf{S}$  des fonctions  $|Z_G|, |Z_{DG}|, \dots, |Z_{D^{n-t}G}|$ . On en déduit que la fonction  $|J_G(s)|$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbf{R}$  des fonctions  $|Z_G|, |Z_{DG}|, \dots, |Z_{D^n G}|$ . En particulier, on a  $|J_G(s)| \in \mathbf{CGraphs}_*$ .

## 5. LA THÉORIE DES MATROÏDES

### 5.1. Définitions et propriétés élémentaires.

Le matroïde est un objet combinatoire, qui généralise la notion de dépendance linéaire dans un espace vectoriel. Il existe plusieurs façons de présenter cette notion combinatoire, et on choisit la démarche de la fonction de rang, ce qui est adapté à notre cadre : on l'utilisera pour comprendre le théorème d'universalité de Mnëv, après avoir établi un lien entre les matroïdes et les graphes dans le langage des schémas d'incidence.

**Notations 5.1.** Si  $K$  est un corps et  $Y$  est un sous-ensemble d'un  $K$ -espace vectoriel  $F$ , on note  $\langle Y \rangle$  le sous- $K$ -espace vectoriel de  $F$  engendré par l'ensemble  $Y$ .

On commence par définir les fonctions de rang partiellement définies :

**Définition 5.2.** Soient  $V$  un ensemble fini,  $U \subset \mathcal{P}(V)$  et  $\pi$  une fonction  $U \rightarrow \mathbb{N}$ . On dit que  $\pi$  est une **fonction de rang partiellement définie (FRPD)** sur  $V$ , et  $U = \text{dom}(\pi)$  est le **domaine** de  $\pi$ .

Une **fonction de rang totalement définie (FRTD)** sur  $V$  est une FRPD  $\pi$  sur  $V$  dont le domaine est  $\mathcal{P}(V)$  tout entier. Le nombre  $\pi(V)$  est le **rang** de la fonction  $\pi$ .

La notion de matroïde est plus exigeante, avec un certain nombre d'axiomes de plus :

**Définition 5.3.** Soit  $V$  un ensemble fini. Une **fonction de rang** sur  $V$  est une FRTD  $\rho$  sur  $V$  vérifiant les axiomes suivants :

- 1) Pour tout  $X \subset V$ ,  $\rho(X) \leq \#X$  ( $\rho$  est bornée par le cardinal).
- 2) Pour tout  $X \subset Y \subset V$ ,  $\rho(X) \leq \rho(Y)$  ( $\rho$  est croissante).
- 3) Pour tout  $X, Y \subset V$ ,  $\rho(X \cap Y) + \rho(X \cup Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$  ( $\rho$  vérifie le théorème du rang).

Un **matroïde (fini)** est la donnée d'un couple  $(V, \rho)$ , où  $V$  est un ensemble fini et  $\rho$  est une fonction de rang sur  $V$ .

On a la notion de représentabilité, avec laquelle on peut voir les matroïdes comme une généralisation des matrices :

**Définition 5.4.** Soient  $V$  un ensemble fini,  $\pi$  une FRPD sur  $V$ ,  $K$  un corps et  $s \in \mathbb{N}$ . Soit  $f$  une fonction  $V \rightarrow K^s$ . On dit que  $f$  est une **représentation** de  $\pi$  sur  $K$  dans  $K^s$  si tout  $W \in \text{dom}(\pi)$ ,  $\pi(W) = \dim_K \langle f(W) \rangle$ , et qu'une FRPD est **représentable** sur  $K$  si elle admet une représentations sur  $K$  dans un certain  $K^s$ .<sup>10</sup>

10. Notons que l'on peut se restreindre à  $s \leq \#V$ . Mais en fait, comme on le verra dans la Remarque 5.8 plus bas, la dimension  $s$  joue un rôle peu important.

Un matroïde est dit représentable sur  $K$  si sa fonction du rang, vue comme FRPD, est représentable sur  $K$ .

L'intérêt des axiomes pour définir un matroïde est dans ses représentations, par le lemme suivant :

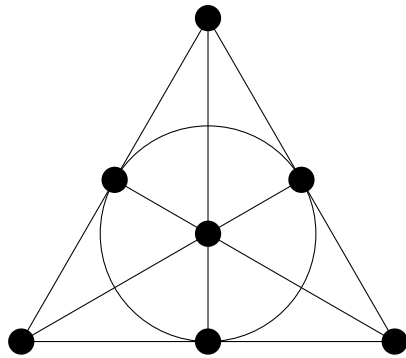
**Lemme 5.5.** Une FRTD qui est représentable sur un corps est une fonction de rang.

La preuve est une simple vérification des axiomes d'un matroïde et est laissée en exercice.

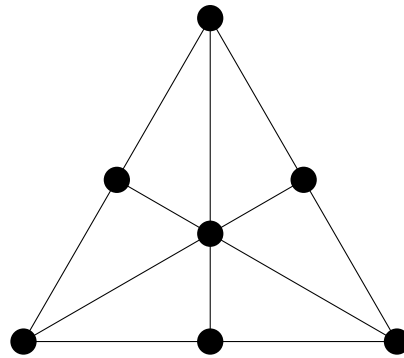
**Remarque 5.6.** La représentabilité dépend effectivement du corps de base choisi : un exemple célèbre est les matroïdes de Fano et d'anti-Fano. Pour chacun des deux on considère une FRPD  $\pi$  sur un ensemble  $V$  de cardinal 7, dont le domaine est l'ensemble des sous-ensembles de  $V$  de cardinal 3, définie comme suit : pour tout  $\{A, B, C\} \subset V$ , on définit

$$\pi(\{A, B, C\}) = \begin{cases} 2 & \text{si } A, B, C \text{ sont alignés} \\ 3 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où les relations d'alignement est exprimé par les deux dessins ci-dessous (les trois points sur le cercle sont considérés aussi comme alignés). Une telle FRPD se prolonge de façon unique en un matroïde de rang 3.



Le matroïde de Fano



Le matroïde d'anti-Fano

Le matroïde de Fano n'est représentable que sur les corps de caractéristique 2, tandis que le matroïde d'anti-Fano est représentable uniquement sur les corps de caractéristique différente de 2. La somme directe d'un matroïde de Fano et d'un matroïde d'anti-Fano (dont la fonction de rang est canoniquement définie comme la somme des deux fonctions de rang) est un exemple de matroïde qui n'est représentable sur aucun corps.<sup>11</sup>

Afin d'étudier la représentabilité et les représentations d'un matroïde, on introduit la définition schématique suivante :

<sup>11</sup>. En général, le problème de déterminer si un matroïde est représentable sur un corps fini donné est algorithmiquement difficile, et la représentabilité ne dépend pas uniquement de la caractéristique du corps.

**Définition 5.7.** Soient  $V$  un ensemble fini,  $\pi$  une FRPD sur  $V$  et  $s \in \mathbb{N}$ . On définit  $L(\pi, s)$  comme le sous-schéma de  $\text{Fun}(V, s)$  formé de l'ensemble des  $f \in \text{Fun}(V, s)$  telles que pour tout  $W \in \text{dom}(\pi)$ , la restriction de  $f$  à  $\text{Fun}(W, s)$  est dans  $\text{Fun}_{\pi(W)}(W, s)$ .

Lorsque  $M = (V, \rho)$  est un matroïde de rang  $r$ , on note  $X(M, s) = L(\rho, s)$ , et  $X(M) = X(M, r)$ .

Si  $K$  est un corps, l'ensemble des  $K$ -points  $L(\pi, s)(K)$  s'identifie à l'ensemble des représentations de  $\pi$  dans  $K^s$ , donc la définition précédente est juste une transcription de la représentabilité dans le langage schématique.

**Remarque 5.8.** 1) Soit  $M$  un matroïde de rang  $r$ . Comme une représentation de  $M$  dans  $K^s$  a toujours son image inclus dans un sous  $K$ -espace vectoriel de dimension  $r$ , en comptant le nombre de tels sous-espaces, on obtient  $|X(M, s)| = |\text{Gr}(r, s)| |X(M)|$ , et donc l'ensemble  $X(M, s)(K)$  est non-vide si et seulement si  $s \geq r$  et que  $M$  est représentable sur  $K$ .

2) Si  $V \subset W$ , et  $\pi, \pi'$  sont deux FRPDs respectivement sur  $V$  et  $W$ , tels que  $\pi'$  prolonge  $\pi$  (i.e. si  $\text{dom}(\pi) \subset \text{dom}(\pi')$  et  $\pi'|_{\text{dom}(\pi)} = \pi$ ), alors on a naturellement un morphisme de schémas  $L(\pi', s) \rightarrow L(\pi, s)$ .

Dans le module  $\mathbf{CMot}$ , on peut définir un sous-module de fonctions pour tous les matroïdes :

**Définition 5.9.** On définit  $\mathbf{CMatroids}$  comme le sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{CMot}$  engendré par toutes les fonctions de la forme  $|X(M)|$ , où  $M$  parcourt l'ensemble des matroïdes.

De même manière, on définit  $\mathbf{CFRPD}$  (respectivement  $\mathbf{CFRTD}$ ) comme le sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{CMot}$  engendré par toutes les fonctions de la forme  $|L(\pi, s)|$ , où  $\pi$  parcourt l'ensemble des FRPDs (respectivement FRTDs) et  $s \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 5.10.** D'après la Remarque 5.8, on a  $|X(M, s)| = |\text{Gr}(r, s)| |X(M)|$ , avec  $|\text{Gr}(r, s)| \in \mathbf{S}$ . Par conséquent  $\mathbf{CMatroids}$  est le sous- $\mathbf{R}$ -module de  $\mathbf{CMot}$  engendré par toutes les fonctions de la forme  $|X(M, s)|$ .

On termine cette section avec la proposition suivante, qui efface la différence entre matroïdes et fonctions lorsque l'on parle du module de fonctions de tous les matroïdes :

**Proposition 5.11.** On a l'égalité  $\mathbf{CFRPD} = \mathbf{CFRTD} = \mathbf{CMatroids}$ .

*Démonstration.* Par définition on sait que  $\mathbf{CFRPD} \supset \mathbf{CFRTD} \supset \mathbf{CMatroids}$ . On montre que les deux inclusions sont des égalités.

Soient  $\pi$  une FRPD sur un ensemble fini  $V$ ,  $K$  un corps et  $f \in L(\pi, s)(K)$ . Notons  $P(\pi)$  l'ensemble des prolongements de  $\pi$  en une FRTD sur  $V$ . Considérons la FRTD  $\rho$  sur  $V$  définie par  $\rho(W) = \dim_K \langle f(W) \rangle$ . Clairement on a  $\rho \in P(\pi)$ , et  $f \in L(\rho, s)(K)$ . De plus, si  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux prolongements différents dans  $P(\pi)$ , alors les ensembles  $L(\rho, s)(K)$  et  $L(\rho', s)(K)$  sont disjoints. On en déduit que les ensembles  $L(\rho, s)(K)$ , où  $\rho$  parcourt  $P(\pi)$ , forment une partition de l'ensemble  $L(\pi, s)(K)$ . En particulier, en prenant  $K$  les différents corps finis, on obtient l'identité

$$|L(\pi, s)| = \sum_{\rho \in P(\pi)} |L(\rho, s)|,$$

ce qui montre la première égalité.

La deuxième égalité découle du Lemme 5.5 : si  $\rho$  est une FRTD telle que la fonction  $|L(\rho, s)|$  est non nulle, alors  $\rho$  est représentable sur un corps et donc c'est une fonction de rang.

□

Dans la suite on travaille surtout avec les FRPDs.

## 5.2. Lien avec la théorie de graphes.

Dans cette section, on va appliquer les outils de la théorie des matroïdes développés dans la section précédente afin de les relier à la théorie de graphes. Dans cette section on démontre l'inclusion  $\mathbf{CMatroids} \subset \mathbf{CGraphs}_*$ .

**Définition 5.12.** Soient  $G$  un graphe,  $\pi$  une FRPD sur  $V(G)$  et  $s \in \mathbb{N}$ . On définit  $J_G(\pi, s)$  comme le sous-schéma de  $J_G(s)$  formé de l'ensemble des couples  $(Q, f) \in J_G(s)$  tels que pour tout  $W \in \text{dom}(\pi)$ , la restriction de  $f$  à  $\text{Fun}(W, s)$  est dans  $\text{Fun}_{\pi(W)}(W, s)$ , i.e.  $f|_W$  est de rang  $\pi(W)$ .

Notons qu'en particulier, lorsque  $\text{dom}(\pi) = \emptyset$ , on a  $J_G(\pi, s) = J_G(s)$ .

La définition précédente permet de rajouter de l'information matroïdale aux schémas d'incidences  $J_G(s)$ . Et inversement, on peut aussi établir des propriétés des matroïdes via la récurrence sur les graphes. Cette section est essentiellement consacré à l'étude des liens entre ces deux aspects.

Dans un cas particulier, lorsque le graphe  $G$  est discret, le schéma  $J_G(\pi, s)$  est directement relié aux matroïdes par le lemme suivant :

**Lemme 5.13.** Soient  $V$  un ensemble fini,  $\pi$  une FRPD sur  $V$  et  $s \in \mathbb{N}$ . Si on note  $G$  le graphe discret  $(V, \emptyset)$ , alors on a l'égalité :

$$|J_G(\pi, s)| = |\text{Sym}_s^s| |L(\pi, s)|.$$

*Démonstration.* Par définition, si  $G$  est un graphe discret, on a  $J_G(s) = \text{Sym}_s^s \times \text{Fun}(V, s)$ , car dans le couple  $(Q, f)$ , le choix de la forme bilinéaire symétrique  $Q$  est indépendant de celui de la fonction  $f$ . De même on a  $J_G(\pi, s) = \text{Sym}_s^s \times L(\pi, s)$ , ce qui donne le résultat par un comptage de points.

□

On a le lemme suivant qui, via une construction de graphes, donne une formule de réduction pour les matroïdes :

**Lemme 5.14.** Soient  $G$  un graphe,  $U$  un sous-ensemble de  $\mathcal{P}(V(G))$  et  $H \in \mathcal{P}(V(G)) \setminus U$ . Soit  $\pi$  une FRPD sur  $V(G)$  de domaine  $U$ . Soit  $s \in \mathbb{N}$ . Pour  $0 \leq i \leq s$ , on note  $\pi_i$  l'unique prolongement de  $\pi$  en une FRPD sur  $V(G)$  de domaine  $U \cup \{H\}$  telle que  $\pi_i(H) = s - i$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{N}$ , on construit un graphe  $G_t$  comme suit : on rajoute  $t$  nouveaux sommets  $y_1, \dots, y_t$  à  $G$ , et chacun des  $y_i$  est connecté exactement aux sommets dans  $H$ . Autrement dit, si on note  $Y = \{y_1, \dots, y_t\}$ , on a  $V(G_t) = V(G) \cup Y$  et  $E(G_t) = E(G) \cup \{e_{yh} \mid h \in H, y \in Y\}$ .

Ainsi le graphe  $G$  est un sous-graphe de  $G_t$ . Donc la fonction  $\pi$  peut être vue canoniquement comme une FRPD sur  $V(G_t)$ .

Alors on a l'égalité suivante :

$$|J_{G_t}(\pi, s)| = \sum_{i=0}^s q^{ti} |J_G(\pi_i, s)|.$$

*Démonstration.* On va d'abord stratifier le schéma  $J_{G_t}(\pi, s)$  et puis compter le nombre de points sur chaque strate.

Soit  $J_{G_t}(\pi, s)_i(\mathbb{F}_q) = \{(Q, f) \in J_G(\pi, s)(\mathbb{F}_q) \mid \dim_{\mathbb{F}_q} \langle f(H) \rangle = s - i\}$ . Alors les  $J_{G_t}(\pi, s)_i(\mathbb{F}_q)$ , pour  $0 \leq i \leq s$ , forment une stratification de l'ensemble des  $\mathbb{F}_q$ -points de  $J_G(\pi, s)$  selon la dimension de l'espace engendré par  $f(H)$ . On a donc l'égalité  $\#J_G(\pi, s)(\mathbb{F}_q) = \sum_{i=0}^s \#J_{G_t}(\pi, s)_i(\mathbb{F}_q)$ .

Comme  $\pi_i(H) = s - i$ , l'application de restriction suivante est bien définie :

$$\begin{aligned} J_{G_t}(\pi, s)_i(\mathbb{F}_q) &\rightarrow J_G(\pi_i, s)(\mathbb{F}_q) \\ (Q, f) &\mapsto (Q, f|_{V(G)}) \end{aligned}$$

La fibre au-dessus de chaque point est isomorphe à  $\mathbb{F}_q^{ti}$  : en effet, pour retrouver la fonction  $f$  à partir de la donnée de  $f|_{V(G)}$ , il faut choisir chaque  $f(y_i)$ , qui doit être dans l'orthogonal de  $\langle f(H) \rangle$ , qui est isomorphe à  $\mathbb{F}_q^i$ . On a alors  $\#J_{G_t}(\pi, s)_i(\mathbb{F}_q) = q^{ti} \#J_G(\pi_i, s)(\mathbb{F}_q)$ , et le lemme en découle.  $\square$

Après avoir vu des liens avec les graphes, on a maintenant des outils pour démontrer le résultat principal de ce chapitre, qui montre que le module  $\mathbf{CGraphs}_*$  contient au moins la classe des fonctions  $|J_G(\pi, s)|$  :

**Proposition 5.15.** *Pour tout graphe  $G$ , toute FRPD  $\pi$  sur  $V(G)$  et tout  $s \in \mathbb{N}$ , la fonction  $|J_G(\pi, s)|$  est dans  $\mathbf{CGraphs}_*$ .<sup>12</sup>*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur le cardinal de  $\text{dom}(\pi)$ . Si  $\text{dom}(\pi)$  est vide, on a  $J_G(\pi, s) = J_G(s)$  par définition, et le résultat provient de la Proposition 4.4 (ou de manière équivalente la Remarque 4.21).

Supposons que le résultat est vrai pour tout graphe  $G$  et toute FRPD  $\pi$  telle que  $\#\text{dom}(\pi) \leq a$ . Soit  $G$  un graphe dont  $V(G)$  est l'ensemble des sommets. Soit  $W \subset \mathcal{P}(V(G))$  tel que  $\#W = a + 1$ . Il suffit de montrer le résultat pour tout tel  $W$  et toute FRPD de domaine  $W$ .

Soit  $H \in W$  et  $U = W \setminus \{H\}$ . Comme dans le Lemme 5.14, si  $\pi$  est une FRPD de domaine  $U$ , pour  $0 \leq i \leq s$ , on note  $\pi_i$  le prolongement de  $\pi$  en une FRPD de domaine  $W$ , avec  $\pi_i(H) = s - i$ . Alors toute FRPD de domaine  $W$  est s'exprime de façon unique sous la forme  $\pi_i$ , où  $\pi$  est une FRPD de domaine  $U$  et  $0 \leq i \leq s$ . Ainsi, on peut fixer  $\pi$  une FRPD de domaine  $U$ , et il suffit de montrer le résultat pour toutes les FRPDs de la forme  $\pi_i$ ,  $0 \leq i \leq s$ .

12. Notons que cette méthode permet de montrer que les  $|Z_G|$  engendrent  $\mathbf{CMot}$  comme  $\mathbf{R}$ -module, pour  $G$  graphe simple biparti (un graphe est biparti s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles  $W$  et  $W'$  telle que chaque arête ait une extrémité dans  $W$  et l'autre dans  $W'$ ).

Le Lemme 5.14 dit que pour tout  $t \in \mathbb{N}$ , on a l'identité  $|J_{G_t}(\pi, s)| = \sum_{i=0}^s q^{ti} |J_G(\pi_i, s)|$ . On obtient un système linéaire de  $s + 1$  équations en faisant varier  $t$  entre 0 et  $s$ , que l'on sait résoudre par rapport aux inconnus  $|J_G(\pi_i, s)|$  en inversant une matrice de Van der Monde. Donc chaque fonction  $|J_G(\pi_i, s)|$  est combinaison linéaire des  $|J_{G_t}(\pi, s)|$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}(q)$ . Or chaque fonction  $|J_{G_t}(\pi, s)|$  est dans  $\mathbf{CGraphs}_*$  par hypothèse de récurrence, donc la fonction  $|J_G(\pi_i, s)|$  aussi, ce qui achève la preuve.  $\square$

On sait que pour tout  $s \in \mathbb{N}$ , la fonction  $|Sym_s^s|$  est dans  $\mathbf{S}$ . Et alors on obtient le résultat suivant comme corollaire du Lemme 5.13 et de la Proposition 5.15 :

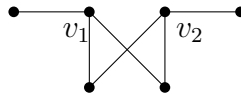
**Proposition 5.16.** *Soient  $V$  une ensemble fini et  $\pi$  une FRPD sur  $V$ . Alors la fonction  $|L(\pi, s)|$  est dans  $\mathbf{CGraphs}_*$ .*

Par conséquent, on obtient une inclusion  $\mathbf{CMatroids} = \mathbf{CFRPD} \subset \mathbf{CGraphs}_*$ .

**Remarque 5.17.** Résumons ce qu'on a obtenu au niveau effectif :

Soit  $V$  un ensemble fini et  $\pi$  une FRPD sur  $V$ . Le Lemme 5.13 dit que pour  $G = (V, \emptyset)$  le graphe discret, on a  $|L(\pi, s)| = \sigma |J_G(\pi, s)|$ , avec  $\sigma \in \mathbf{S}$ .

Maintenant soit  $f$  une fonction  $dom(\pi) \rightarrow \{0, 1, \dots, s\}$ . On note  $G_f$  le graphe obtenu après les opérations successives suivantes : pour tout  $W \in dom(\pi)$ , on rajoute  $f(W)$  sommets, qui sont liés uniquement aux sommets dans  $W$ . Par exemple, si  $G$  est le graphe discret à deux sommets  $v_1, v_2$ ,  $\pi$  est la FRPD  $\pi(\{v_1\}) = 1, \pi(\{v_2\}) = 1, \pi(\{v_1, v_2\}) = 2$ , et prenons  $f = \pi$ , alors  $G_f$  est le graphe



On note  $T$  l'ensemble des graphes  $G_f$ , qui est de cardinal  $(s+1)^{\#dom(\pi)}$ . Alors la Proposition 5.15 montre par récurrence la chose suivante : La fonction  $|J_G(\pi, s)|$  est combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbf{S}$  des fonctions  $|J_{G'}(s)|$ , avec  $G' \in T$ .

En fin de compte, on obtient que la fonction  $|L(\pi, s)|$  est la combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbf{S}$  des fonctions  $|J_{G'}(s)|$ , où la somme porte sur un ensemble de  $(s+1)^{\#dom(\pi)}$  graphes  $G'$ .

## 6. LE THÉORÈME D'UNIVERSALITÉ DE MNËV

Dans ce chapitre on travaille dans le R-module  $\mathbf{GeoMot}$ . On démontre que il est engendré par les classes  $[L(\pi, s)]$  associées aux FRPDs, en utilisant le théorème d'universalité de Mnëv suivant :<sup>13</sup>

**Théorème 6.1** (Mnëv, Sturmfels). *Soit  $X$  un schéma affine de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , alors il existe un ensemble fini  $V$ , une FRPD  $\pi$  sur  $V$  et un élément  $\sigma \in \mathbf{S}$  tels que*

$$\sigma[X] = [L(\pi, 3)].$$

13. La version originale du théorème d'universalité de Mnëv porte sur la relation entre les matroïdes orientées et les sous-ensembles semi-algébriques de  $\mathbb{R}^n$ , et ici on donne un énoncé dans notre cadre.

**Remarque 6.2.** D'après la Proposition 2.23, on sait que tout schéma de type fini sur  $\mathbb{Z}$  admet une stratification en schémas affines de type fini, donc le Théorème 6.1 implique l'égalité  $\text{CMatroids} = \text{CMot}$  (en descendant à  $\text{CMot}$  par l'application d'évaluation). Avec la Proposition 5.16, cela implique directement le Théorème 1.7.

### 6.1. Préliminaires.

On commence par des rappels d'un certain nombre de faits soit bien connus soit déjà vus précédemment :

**Remarque 6.3.** 1) Un faisceau inversible sur un schéma de base est un faisceau localement libre de rang 1.

Soit  $S_0$  un schéma,  $E$  et  $F$  deux faisceaux localement libres sur  $S_0$  de rang respectivement  $e$  et  $f$ . Soit  $\psi : E \rightarrow F$  un morphisme de  $\mathcal{O}_{S_0}$ -modules. On dit que  $\psi$  est de rang  $r$  si son image est localement libre de rang  $r$ , et son conoyau est localement libre de rang  $f - r$ . Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas où le rang de  $F$  est 3.

On travaille sur le schéma de base  $\text{Spec } \mathbb{Z}$ , et on identifie un schéma avec le foncteur qu'il représente. On note pour la suite  $S$  un schéma avec le morphisme canonique  $S \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ .

Par ailleurs, il est bien connu qu'un schéma vu comme foncteur est déterminé par ses valeurs en les schémas affines, dont on peut se restreindre aux schémas affines, ou de manière équivalente aux anneaux commutatifs. On note pour la suite  $R$  un anneau commutatif unitaire avec le morphisme canonique  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}$ .

2) Rappelons que si  $V$  est un ensemble fini, on a

$$\text{Fun}_r(V, 3)(S) = \{\psi : \mathcal{O}_S^V \rightarrow \mathcal{O}_S^3 \mid \text{rang}(\psi) = r\}.$$

Si  $W \subset V$ , on note  $\psi|_W$  la restriction de  $\psi$  à  $\mathcal{O}_S^W$ . On peut même regarder le morphisme  $\psi$  composante par composante : dans le cas particulier où  $W$  est un singleton, on a l'égalité

$$\text{Fun}_1(W, 3)(S) = \{\psi : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S^3 \mid \text{rang}(\psi) = 1\} \simeq \mathbb{P}_S^2 \times \mathbb{G}_{m,S}.$$

D'où un isomorphisme  $\text{Fun}_1(W, 3) \simeq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{G}_m$ . En réalité, le groupe multiplicatif ne joue aucun rôle, car il agit trivialement sur les faisceaux localement libres. Il suffit alors de regarder le morphisme de projection  $\text{Fun}_1(W, 3) \rightarrow \mathbb{P}^2$ , qui est une fibration triviale de fibre  $\mathbb{G}_m$ . Si  $\pi$  est une FRPD sur  $V$  qui vaut 1 sur chaque singleton, on peut alors voir le schéma  $L(\pi, 3)$  comme un sous-schéma de  $(\mathbb{P}^2)^V \times (\mathbb{G}_m)^V$ , qui fibre trivialement sur un sous-schéma  $\bar{L}(\pi, 3)$  de  $(\mathbb{P}^2)^V$  de fibre  $(\mathbb{G}_m)^V$ . On travaille désormais avec ces schémas  $\bar{L}(\pi, 3)$  pour simplifier.

Dans la suite, on travaille avec des FRPDs qui valent 1 en chaque singleton. Notons que dans ce cas, le groupe algébrique  $PGL(3)$  agit sur  $(\mathbb{P}^2)^V$  par automorphisme, qui laisse stable  $\bar{L}(\pi, 3)$ , car un automorphisme de  $\mathbb{P}^2$  ne change pas les relations de dépendance linéaire.

3) Rappelons que si  $S$  est un schéma, un facteur direct de  $\mathcal{O}_S^3$  de rang  $r$  est un sous- $\mathcal{O}_S$  module localement libre de rang  $r$  qui admet un supplémentaire localement libre de rang  $3 - r$ .



On parle alors des  $S$ -**points** de  $\mathbb{P}^2$ , i.e. facteurs directs de  $\mathcal{O}_S^3$  de rang 1. Si un  $S$ -point de  $\mathbb{P}^2$  est libre et est engendré par une section  $(a, b, c)$  de  $\mathcal{O}_S^3$ , on note encore  $(a, b, c)$  ce  $S$ -point de  $\mathbb{P}^2$ , par abus de notation.

Une  $S$ -**droite** de  $\mathbb{P}^2$  est un facteur direct de  $\mathcal{O}_S^3$  de rang 2. Trois  $S$ -points de  $\mathbb{P}^2$  sur une même droite sont dits alignés.

Lorsque la construction est fonctorielle en le schéma  $S$ , on parle de points et droites de  $\mathbb{P}^2$ .

## 6.2. L'espace de configurations de quadruplets de points en position générale.

Soit  $R$  un anneau. Les résultats de cette section sont relatifs aux  $R$ -points et fonctoriels en l'anneau  $R$ .

On cherche d'abord à classifier les quadruplets de points de  $\mathbb{P}^2$  en position générale, i.e. dont tous les 3 points ne sont pas alignés. C'est le point de départ de notre construction.

On traduit cette condition en terme matroïdal : soient  $V_0 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$  et  $\pi_0$  la FRPD sur  $V_0$  suivante : pour tous les  $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$  distincts,  $\pi_0(\{P_i, P_j, P_k\}) = 3$ . Considérons le schéma  $\bar{L}(\pi_0, 3)$  : en oubliant les conditions de non-alignement, on obtient un morphisme d'inclusion canonique  $\iota : \bar{L}(\pi_0, 3) \rightarrow (\mathbb{P}^2)^4$ , qui est une immersion ouverte car les conditions de non-alignement sont des conditions ouvertes. On peut décrire l'image de  $\iota$  plus précisément, par le lemme suivant :

**Lemme 6.4.** *L'image de l'immersion  $\iota$  est un espace homogène principal du schéma en groupes  $PGL(3)$  via l'action canonique de  $PGL(3)$  sur  $(\mathbb{P}^2)^4$ .*

*Démonstration.* On note  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0}) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$  le quadruplet de points en position générale canonique. On vérifie sans difficulté qu'il est dans l'image de  $\iota$ .

Si  $g \in PGL(3)$ , l'image du quadruplet canonique  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$  par l'action de  $g$  est le quadruplet  $(g \cdot P_{1,0}, g \cdot P_{2,0}, g \cdot P_{3,0}, g \cdot P_{4,0})$ . On voit facilement que ce dernier est aussi dans l'image de  $\iota$ . Donc l'image de  $\iota$  contient l'orbite de  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$  par l'action de  $PGL(3)$ .

Maintenant soit  $(P_1, P_2, P_3, P_4)$  un point dans l'image de  $\iota$ . On cherche à résoudre le système d'équations  $g \cdot P_{i,0} = P_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  par rapport à  $g$  dans  $PGL(3)$ . Par algèbre linéaire élémentaire, on sait que la solution existe et est unique dans  $PGL(3)$ , donc l'action de  $PGL(3)$  sur l'image de  $\iota$  est libre et transitive, ce qui montre que cette image est un espace homogène principal du groupe  $PGL(3)$ .  $\square$

## 6.3. Intersection de droites dans $\mathbb{P}^2$ .

On introduit maintenant l'opération  $I$ , qui fait des manipulations au niveau matroïdal afin d'interpréter la situation d'intersection de deux droites dans  $\mathbb{P}^2$  dans la géométrie.

Rappelons qu'une  $S$ -droite de  $\mathbb{P}^2$  est un facteur direct de  $\mathcal{O}_S^3$  de rang 2. L'intersection de deux droites distinctes est un faisceau inversible. On dit qu'une intersection de deux droites est **bonne** s'il est libre, et alors c'est un point de  $\mathbb{P}^2$ . Dans le cas particulier où  $S = \text{Spec } R$  avec  $R$  un anneau local, comme tout  $R$ -module projective de type fini est libre, toute intersection est bonne.

On s'intéresse à l'opération suivante : étant donnés 4 points de  $\mathbb{P}^2$ ,  $\{A, B, C, D\}$ , non tous alignés, alors si l'intersection est bonne, le point d'intersection des droites  $AB$  et

$CD$  est unique et est noté  $I(A, B, C, D)$ . De plus, le point  $I(A, B, C, D)$  est uniquement déterminé par la donnée de  $\{A, B, C, D\}$ .

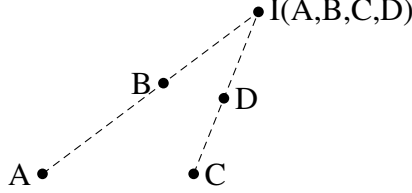


FIGURE 1. Intersection des droites  $AB$  et  $CD$

En terme matroïdal, cette construction s'exprime de façon suivante : soient  $V$  un ensemble fini contenant au moins 4 éléments  $\{A, B, C, D\}$  et  $\pi$  une FRPD sur  $V$ . On prolonge  $\pi$  en une FRPD  $\pi'$  sur  $V \cup \{I\}$ , avec  $\pi'(\{I\}) = 1$ ,  $\pi'(\{I, A, B\}) = 2$  et  $\pi'(\{I, C, D\}) = 2$ . On a alors un morphisme de schémas

$$\begin{aligned} \bar{L}(\pi', 3) &\rightarrow \bar{L}(\pi, 3) \\ (A, B, C, D, I, \dots) &\mapsto (A, B, C, D, \dots), \end{aligned}$$

qui induit une bijection entre les  $S$ -points pour les  $S$  sur lesquels l'intersection est bonne. Or si  $S = \text{Spec } R$  où  $R$  est un anneau local, toute intersection est bonne. On en déduit que le morphisme ci-dessus est un isomorphisme. On appelle cette opération l'opération  $I$ .

En fait, toutes les intersections dans la suite sont bonnes : comme on donnera explicitement les coordonnées, les vérifications sont automatiques.

Si on applique successivement l'opération  $I$  à la FRPD  $\pi$  un nombre fini de fois, en choisissant à chaque fois des quadruplets de sommets différents, on obtient un morphisme de schémas  $\bar{L}(\pi^+, 3) \rightarrow \bar{L}(\pi, 3)$ , qui reste un isomorphisme.

#### 6.4. Addition et multiplication projectives.

Dans cette section on fixe  $R$  un anneau et tout le langage est relatif aux  $R$ -points.

On commence par le schéma  $L(\pi_0, 3)$  de la Section 6.2. On a vu que c'est un espace homogène principal du groupe  $PGL(3)$ . On peut donc se concentrer sur l'étude d'un quadruplet particulier  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0}) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$  et de regarder la fibre au-dessus de ce quadruplet.

On rajoute maintenant deux points  $X = (1, 0, x)$  et  $Y = (1, 0, y)$ . Le lemme suivant donne une construction géométrique qui reflète des opérations algébriques sur  $p$  et  $q$ , en utilisant l'opération  $I$  :

**Lemme 6.5.** *En partant des points  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$  et  $X$  et  $Y$ , et en appliquant un nombre fini de fois l'opération  $I$ , on peut construire les points  $(1, 0, -x)$ ,  $(1, 0, x + y)$  et  $(1, 0, xy)$  comme point d'intersection.*

*Démonstration.* Les constructions des points  $(1, 0, x+y)$  (addition projective) et  $(1, 0, xy)$  (multiplication projective) sont illustrées respectivement par la Figure 2 et la Figure 3.

Par exemple, pour l'addition projective, on fait consécutivement les 4 opérations  $I$  suivantes :

$$I((0, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)) = (1, 1, 0)$$

$$I((1, 0, x), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)) = (0, 1, -x),$$

$$I((1, 0, y), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)) = (1, 1, y),$$

$$I((0, 1, -x), (1, 1, y), (0, 0, 1), (1, 0, 0)) = (1, 0, x + y).$$

Il est facile de vérifier que les intersections concernées sont toutes bonnes.

La construction de la multiplication projective est similaire. Dans la Figure 4, on construit le point  $(1, 0, -1)$  (ce qui ne nécessite pas les points  $X$  et  $Y$ ). L'opposé  $(1, 0, -x)$  est alors simplement la multiplication de  $p$  par  $-1$ .  $\square$

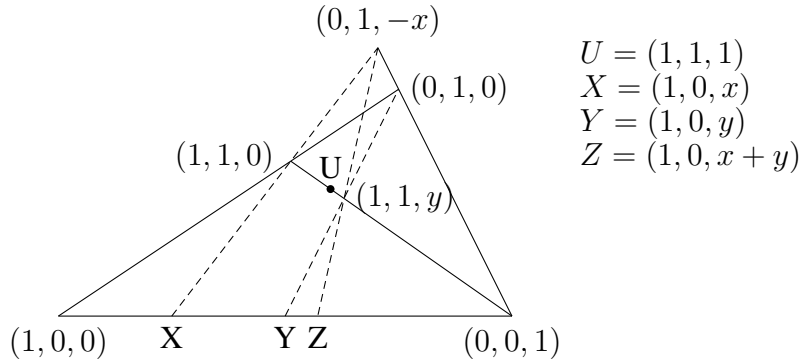


FIGURE 2. La construction de l'addition projective

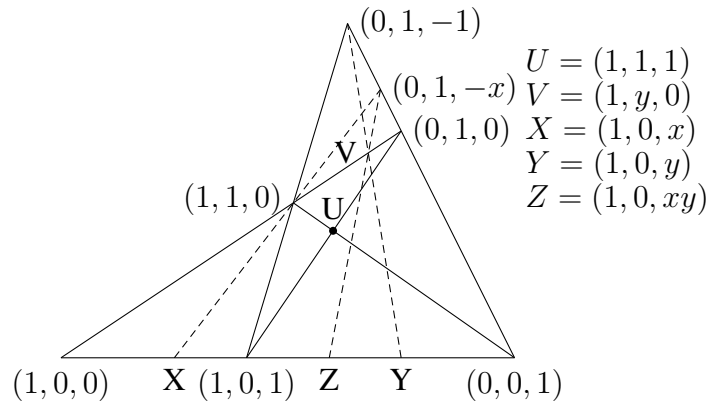
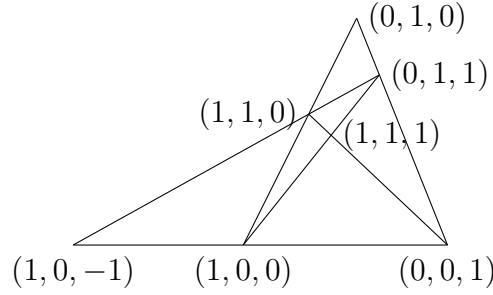


FIGURE 3. La construction de la multiplication projective

FIGURE 4. La construction du point  $(1, 0, -1)$ 

Comme l'addition, la multiplication et la négation engendrent l'algèbre des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , on a le corollaire suivant :

**Corollaire 6.6.** *Soit  $n \geq 1$  un entier. Soit  $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$  un polynôme à plusieurs variables.*

*En partant des points  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$  et les  $n$  points  $(1, 0, x_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , et en appliquant un nombre fini de fois l'opération  $I$ , on peut construire le point  $(1, 0, f(x_1, \dots, x_n))$  comme point d'intersection.*

### 6.5. Fin de la construction.

Comme dans l'énoncé du Théorème 6.1, on suppose que  $X$  est un schéma affine de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , que l'on peut supposer de la forme  $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]/J)$ , où  $J$  est un idéal de l'anneau affine noethérien  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ . L'idéal  $J$  est forcément engendré par un nombre fini de polynômes, notés  $f_1, \dots, f_m$ . On suppose, sans perte de généralité, que l'entier  $n$  est minimal, i.e. chaque variable  $X_i$  intervient dans au moins un des polynômes  $f_k$ .<sup>14</sup>

Grosso modo, l'idée est d'utiliser le Corollaire 6.6 : soit  $R$  un anneau, si on part des  $R$ -points  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$  et les  $n$  points  $(1, 0, x_i)$ , où les  $x_i$  sont des variables formelles, le corollaire permet de construire les points  $(1, 0, f_k(x_1, \dots, x_n))$  comme point d'intersection. Si on impose ensuite les conditions  $(1, 0, f_k(x_1, \dots, x_n)) = (1, 0, 0)$  pour  $1 \leq k \leq m$ , on a des contraintes sur les  $x_i$  données par  $f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ , et alors l'ensemble des  $(1, 0, x_i)$  est en bijection avec l'ensemble des  $R$ -points du schéma  $X$ .

Maintenant on passe à la construction proprement dite. On part de la FRPD  $\pi_0$  de la Section 6.2, qui décrit les points  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . On rajoute  $n$  points  $Q_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  et on prolonge  $\pi_0$  en une FRPD  $\pi_1$  sur l'ensemble  $\{P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, \dots, Q_n\}$ , et on aimerait avoir  $Q_i = (1, 0, x_i)$  dans la fibre sur  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$ . Pour cela, comme les trois points  $(1, 0, 0), (0, 0, 1)$  et  $(1, 0, x_i)$  sont alignés, avec  $(1, 0, x_i) \neq (0, 0, 1)$ , on est ramené à rajouter les conditions

$$\pi_1(\{P_1, P_3, Q_i\}) = 2, \pi_1(\{P_3, Q_i\}) = 2$$

pour tout  $1 \leq i \leq n$ . On a ainsi un morphisme de schémas  $\bar{L}(\pi_1, 3) \rightarrow \bar{L}(\pi_0, 3)$ . Au niveau des  $R$ -points, dans la fibre au-dessus de  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$ , les  $Q_i$  sont de la

14. Dans le cas contraire,  $X$  est le produit fibré d'un espace affine et d'un autre schéma, et on peut très bien prendre ce dernier à la place de  $X$ .

forme  $(a_i, 0, b_i) \in \mathbb{P}_R^2$ , avec  $a_i \neq 0$ . Le point  $(a_i, 0, b_i)$  s'écrit de la forme  $(1, 0, x_i)$  si et seulement si  $a_i$  est inversible dans l'anneau  $R$ , mais a priori ce n'est pas toujours le cas. On rajoutera des conditions ultérieurement et on verra qu'elles forcent les  $a_i$  à être inversibles.

Malgré ce défaut, l'addition et la multiplication projectives de la Section 6.4 fonctionnent, sous une forme légèrement différente mais totalement naturelle. Par exemple, dans l'addition projective, si on remplace les points  $(1, 0, p)$  et  $(1, 0, q)$  par  $(a, 0, b)$  et  $(c, 0, d)$  respectivement, alors on obtient à la fin le point  $(ac, 0, bc + ad)$  à la place de  $(1, 0, p+q)$  : comme règle, il suffit d'écrire  $p = \frac{b}{a}$  et  $q = \frac{d}{c}$  comme des fractions formelles, et de chasser les dénominateurs dans les coordonnées homogènes de tous les points.

On fait maintenant la construction d'intersection du Corollaire 6.6 pour tous les polynômes  $f_k$  : désignons  $S_j$ ,  $1 \leq j \leq l$  les points intermédiaires dans la construction, et  $T_k$ ,  $1 \leq k \leq m$  les points correspondant aux points  $(1, 0, f_k(x_1, \dots, x_n))$ . On a un prolongement de la FRPD  $\pi_1$  en une FRPD  $\pi_2$  sur l'ensemble

$$V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, \dots, Q_n, S_1, \dots, S_l, T_1, \dots, T_m\}.$$

On a un morphisme de schémas  $\bar{L}(\pi_2, 3) \rightarrow \bar{L}(\pi_1, 3)$ , qui est un isomorphisme.

En composant les deux morphismes précédents on obtient un morphisme  $\bar{L}(\pi_2, 3) \rightarrow \bar{L}(\pi_0, 3)$ . En chassant les dénominateurs dans les coordonnées homogènes, on a le résultat suivant : au niveau des  $R$ -points, dans la fibre au-dessus de  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$ , les  $T_k$  sont de la forme  $(g_k(a_1, \dots, a_n), 0, h_k(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n))$ , où  $h_k$  est un polynôme et  $g_k$  est un monôme. Plus précisément,  $g_k$  est de la forme  $g_k(a_1, \dots, a_n) = a_1^{\alpha_{1,k}} \dots a_n^{\alpha_{n,k}}$ , où les  $\alpha_{i,k}$  sont dans  $\mathbb{N}$ , et pour tout  $(i, k)$  tel que la variable  $x_i$  intervient dans le polynôme  $f_k$ , on a  $\alpha_{i,k} \geq 1$ .

On passe maintenant à la dernière étape : il faut imposer les relations  $f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ . On prolonge alors la FRPD  $\pi_2$  en une FRPD  $\pi_3$  sur le même ensemble  $V$ , en rajoutant les conditions

$$\pi_3(\{P_1, T_k\}) = 1$$

pour tout  $1 \leq k \leq m$ . On a donc un morphisme de schémas  $\bar{L}(\pi_3, 3) \rightarrow \bar{L}(\pi_2, 3)$ , qui est cette fois une immersion. En le composant avec le morphisme précédent  $\bar{L}(\pi_2, 3) \rightarrow \bar{L}(\pi_0, 3)$ , on obtient un morphisme  $\lambda : \bar{L}(\pi_3, 3) \rightarrow \bar{L}(\pi_0, 3)$ .

Voyons ce que l'on a obtenu : au niveau des  $R$ -points, dans la fibre de  $\lambda$  au-dessus de  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$ , on obtient  $m$  égalités

$$(g_k(a_1, \dots, a_n), 0, h_k(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)) = (1, 0, 0).$$

En particulier, pour  $1 \leq k \leq m$ , on a  $m$  égalités  $a_1^{\alpha_{1,k}} \dots a_n^{\alpha_{n,k}} = 1$ . Comme on a supposé que chaque variable  $x_i$  intervient dans au moins un des polynômes  $f_k$ , on en déduit que tous les  $a_i$  sont inversibles dans l'anneau  $R$ , ce qui nous permet à nouveau d'écrire les points  $Q_i$  sous la forme  $(1, 0, x_i)$ . Et alors on a effectivement les contraintes  $f_k(x_1, \dots, x_n) = 0$  pour  $1 \leq k \leq m$ , ce qui justifie que la fibre au-dessus de  $(P_{1,0}, P_{2,0}, P_{3,0}, P_{4,0})$  est isomorphe à l'ensemble des  $R$ -points du schéma  $X$ .

L'action du groupe  $PGL(3)$  sur  $\bar{L}(\pi_3, 3)$  est libre. Comme le morphisme  $\lambda$  est compatible avec cette action, les autres fibres s'obtiennent par cette même action, et sont toutes

isomorphes au schéma  $X$ . Et alors le morphisme  $\lambda$  est une fibration de fibre  $X$ . Donc dans le groupe  $\mathbf{GeoMot}$ , on a l'égalité

$$[\bar{L}(\pi_3, 3)] = [X] [PGL(3)].$$

En ce qui concerne le schéma  $L(\pi_3, 3)$ , on a tout simplement l'égalité  $[L(\pi_3, 3)] = [X] [PGL(3)] [\mathbb{G}_m]^{l+m+n+4}$ . Comme les motifs  $[PGL(3)]$  et  $[\mathbb{G}_m]$  sont dans le système multiplicatif  $S$ , le Théorème 6.1 en découle.

## 7. DISCUSSIONS ET PERSPECTIVES

### 7.1. Bilan.

On a vu qu'il existe une suite d'emboîtements  $\mathbf{CMatroids} \subset \mathbf{CGraphs}_* \subset \mathbf{CGraphs} \subset \mathbf{CMot}$ , et on a montré que c'est en fait des égalités. On cherche maintenant un  $Y_G$  dont la fonction de comptage est non polynomiale. Alors d'après ce qu'on a vu, on a la démarche suivante :

- 1) Trouver une FRPD  $\pi$ , avec la fonction  $|L(\pi, 3)|$  non polynomiale.
- 2) Ecrire la fonction  $|L(\pi, 3)|$  en combinaison linéaire des termes de la forme  $|J_G|$  suivant la Remarque 5.17, et en déduire un graphe  $G$  avec  $|J_G|$  non polynomiale.
- 3) Ecrire cette fonction  $|J_G|$  en combinaison linéaire des  $|Z_G|, |Z_{DG}|, \dots, |Z_{D^n G}|$ , où  $n$  est le nombre de sommets du graphe  $G$ , et en déduire un graphe  $G'$  avec  $|Z_{G'}|$  non polynomiale. Comme on a un isomorphisme  $Z_{G'} \simeq X_{(DG')^0}$ , on obtient  $|X_{(DG')^0}|$  qui n'est pas polynomiale.
- 4) Utiliser la Proposition 2.33 pour retrouver un  $Y_{G_1}$  qui convient.

Si on cherche à trouver un contre-exemple explicite avec cette méthode, une difficulté majeure se situe dans l'étape 2), où on obtient  $4^{\#dom(\pi)}$  candidats pour  $|J_G|$ . Prenons par exemple le matroïde de Fano, et soit  $\pi$  sa fonction de rang. Alors  $\pi$  est totalement définie sur un ensemble de cardinal 7, donc on a  $\#dom(\pi) = 2^7 = 128$ , et donc le nombre de  $|J_G|$  devient  $4^{128} = 2^{256}$ , ce qui pose de la difficulté à les calculer explicitement. On a donc intérêt à trouver une FRPD  $\pi$  avec  $|L(\pi, 3)|$  non polynomiale, et telle que  $\#dom(\pi)$  soit le plus petit possible.

**Remarque 7.1.** Soient  $S$  un schéma et  $f \in L(\pi, s)(S)$ . Soit  $W$  un élément dans  $dom(\pi)$  tel que  $\pi(W) = \#W$ . Alors on peut facilement vérifier que pour tout sous-ensemble  $W'$  de  $W$ , la restriction de  $f$  à  $Fun(W', s)$  est dans  $Fun_{\#W'}(W', s)$ . Cela traduit le fait que tout sous-ensemble d'un ensemble de vecteurs linéairement indépendants reste linéairement indépendant. Donc il arrive que la valeur d'une FRPD en un ensemble puisse se déduire de celles en les autres ensembles.

En fait, il y a une autre caractérisation des matroïdes par les "ensembles indépendants", qui par définition sont les  $W$  tels que  $\pi(W) = \#W$ , et qui sont maximaux au sens d'inclusion. Etant donné un ensemble fini  $V$ , la donnée d'un matroïde sur  $V$  est équivalente à la donnée d'un ensemble d'ensembles indépendants, appelée une **base**. Par exemple la base du matroïde de Fano est de cardinal 28. Il sera donc intéressant de chercher un matroïde avec une base de cardinal petit, dont le schéma de représentations n'est pas polynomialement dénombrable.

Notons néanmoins que le problème de déterminer les représentations sur des corps finis d'un matroïde donné est algorithmiquement difficile. Une possibilité de trouver une FRPD convenable est de descendre une fonction  $|X|$  dans **CMatroids** via le Théorème 6.1. Dans la section suivante on étudie le comportement en général d'une fonction de comptage.

## 7.2. Sur la fonction de comptage.

Dans cette section on discute sur la fonction de comptage. On l'interprète d'abord en termes de cohomologie à support compact, avant de passer à des exemples de fonctions de comptage non polynomiales.

**Notations 7.2.** Soient  $p$  un nombre premier. On fixe  $\mathbb{F}_{p^\infty}$  une clôture algébrique du corps fini  $\mathbb{F}_p$ , et pour tout  $n \geq 1$ , on note  $\mathbb{F}_{p^n}$  l'unique extension de degré  $n$  de  $\mathbb{F}_p$  dans  $\mathbb{F}_{p^\infty}$ , et on note  $F \in \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^\infty}/\mathbb{F}_p)$  le morphisme de Frobenius géométrique, défini comme l'inverse de l'application  $x \mapsto x^p$ . Il induit un automorphisme sur tout schéma sur  $\mathbb{F}_{p^\infty}$ .

Soient  $l$  un nombre premier différent de  $p$ , et  $Y_{p^\infty}$  un  $\mathbb{F}_{p^\infty}$ -schéma séparé de type fini. Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on note  $H_c^i(Y_{p^\infty}, \mathbb{Q}_l)$  la cohomologie étale  $l$ -adique à support compact, qui est un  $\mathbb{Q}_l$ -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une action de  $F$ , et qui est trivial pour  $i > 2\dim Y_{p^\infty}$ . (Voir [Katz])<sup>15</sup>

La célèbre formule de trace de Lefschetz est l'énoncé suivant :

**Théorème 7.3** (Formule de trace de Lefschetz).

Soit  $Y$  un  $\mathbb{F}_p$ -schéma séparé de dimension  $m$ . Alors pour tout  $n \geq 1$ , le nombre de  $\mathbb{F}_{p^n}$ -points du schéma  $Y$  s'exprime par la somme alternée suivante :

$$\#Y(\mathbb{F}_{p^n}) = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \text{Trace}(F^n | H_c^i(Y \otimes \mathbb{F}_{p^\infty}, \mathbb{Q}_l)).$$

En particulier, soit  $X$  un schéma séparé de type fini sur  $\mathbb{Z}$ , de dimension de Krull  $m$ , alors la formule de trace de Lefschetz s'applique au  $\mathbb{F}_p$ -schéma  $X \otimes \mathbb{F}_p$ . On sait donc qu'il existe un nombre fini de nombres complexes  $\alpha_{ij}$ , valeurs propres de  $F$ , tels que  $\#X(\mathbb{F}_{p^n}) = \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \sum_j (\alpha_{ij})^n$ . En faisant varier le nombre premier  $p$ , on obtient une description de la fonction de comptage  $|X|$ .

**Remarque 7.4.** Soit  $Y$  un  $\mathbb{F}_p$ -schéma séparé de dimension  $m$ . On peut définir sa fonction zêta de Hasse-Weil comme

$$\zeta_Y(s) := \exp \left( \sum_{n=1}^{\infty} \#Y(\mathbb{F}_{p^n}) \frac{s^n}{n} \right) \in 1 + s\mathbb{Q}[[s]].$$

Alors la formule de trace de Lefschetz est équivalente à l'égalité suivante, qui exprime la fonction zêta en un produit alterné de déterminants :

$$\zeta_Y(s) = \prod_{i=0}^{2m} \det(1 - sF | H_c^i(Y \otimes \mathbb{F}_{p^\infty}, \mathbb{Q}_l))^{(-1)^{i-1}}$$

15. Notons que pour un schéma propre lisse, la cohomologie à support compact coïncide avec la cohomologie étale usuelle.

C'est une généralisation de la rationalité de la fonction zêta dans les conjectures de Weil.

Par la formule de trace de Lefschetz on a une connaissance théorique sur la fonction de comptage. Maintenant on donne des exemples non polynomiaux. Un premier exemple est le schéma affine  $X = \text{Spec}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[T])$ , qui est un sous-schéma fermé de la droite affine, avec  $p$  un nombre premier. Alors pour tout  $q \in \mathcal{Q}$  on a

$$\#X(\mathbb{F}_q) = \begin{cases} q & \text{si } p \mid q \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est un exemple non polynomial, mais peu significatif car la fonction est quasi-polynomiale, au sens où elle est polynomiale sauf sur la caractéristique  $p$ . En général les exemples intéressants sont tels que même si on regarde la fonction de comptage en dehors d'un nombre fini de caractéristiques<sup>16</sup>, la fonction n'est pas polynomiale.

Un autre exemple bien connu est le suivant : soit  $X$  un modèle sur  $\mathbb{Z}$  d'une courbe elliptique sur  $\mathbb{Q}$ . D'après les conjectures de Weil (le théorème dans ce cas étant dû à Hasse), pour tout nombre premier  $p$ , il existe un nombre complexe  $\alpha$  de norme  $\sqrt{p}$  qui est quadratique sur  $\mathbb{Q}$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|X|(p^n) = 1 - \alpha^n - \bar{\alpha}^n + p^n$ , où  $\bar{\alpha}$  est le complexe conjugué de  $\alpha$ . La fonction  $|X|$  n'est donc clairement pas polynomiale.<sup>17</sup>

De façon similaire, si on prend à la place  $X$  un modèle sur  $\mathbb{Z}$  d'une courbe projective sur  $\mathbb{Q}$  de genre  $g$ , alors pour tout nombre premier  $p$ , il existe  $g$  nombres complexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  de norme  $\sqrt{p}$  algébriques sur  $\mathbb{Q}$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|X|(p^n) = 1 - \sum_{j=1}^g \alpha_j^n - \sum_{j=1}^g \bar{\alpha}_j^n + p^n$ .

En dimension supérieure, l'exemple d'un schéma abélien généralise l'exemple précédent : soit  $X$  est un schéma abélien sur  $\mathbb{Z}$  de dimension relative  $g$ . Pour tout nombre premier  $p$ , le schéma  $X \otimes \mathbb{F}_p$  est une variété abélienne sur  $\mathbb{F}_p$  de dimension  $g$ , et il existe  $g$  nombres complexes  $\alpha_1, \dots, \alpha_g$  de norme  $\sqrt{p}$  algébriques sur  $\mathbb{Q}$ , tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $|X|(p^n) = \prod_{j=1}^g (1 - \alpha_j^n)(1 - \bar{\alpha}_j^n)$ .

### 7.3. Motifs et périodes.

L'origine de la Conjecture 1.4 de Kontsevich est dans l'étude de la nature arithmétique d'un problème de la théorie quantique des champs. On regarde maintenant un type particulier de graphes :

**Définition 7.5.** Soit  $G$  un graphe connexe dont  $E$  est l'ensemble des arêtes. On dit que  $G$  est **convergent** si le nombre d'arêtes de  $G$  est strictement supérieur à deux fois le premier nombre de Betti, i.e. si on a  $\#E > 2b_1(G)$ . On dit que  $G$  est **primitif divergent** si  $\#E = 2b_1(G)$  et que tout sous-graphe strict connexe de  $G$  est convergent.

La terminologie provient de la convergence d'une intégrale de Feynman. Un graphe primitif divergent est "minimal" parmi les graphes non convergents. Par exemple si  $G$  est

16. Celles-ci correspondent à un nombre fini de places finies de mauvaise réduction.

17. Si on veut aller plus loin, par le "Modularity theorem", la fonction de comptage de  $X$  s'exprime en fonction des coefficients de Fourier d'une certaine forme modulaire de poids 2 de niveau  $N$ , où l'entier  $N$  s'appelle le conducteur de  $X$ .



un cycle de longueur  $n$ , alors si on y ajoute un apex, le graphe  $G^*$ , la "roue à  $n$  rayons" <sup>18</sup>, est primitif divergent.

Soit  $G$  un graphe primitif divergent avec  $2n$  arêtes. On numérote  $e_1, \dots, e_{2n}$  les arêtes, et pour tout  $1 \leq i \leq 2n$  on note  $x_i$  une variable formelle correspondant à l'arête  $e_i$ . Rappelons que l'on a défini le polynôme  $P_G = \sum_T \prod_{e \notin T} x_e$ , où la somme est portée sur l'ensemble des arbres couvrants de  $G$ .

On s'intéresse à l'intégrale convergente suivante

$$I_G = \int_{\sigma} \frac{\Omega_G}{P_G^2}$$

où  $\sigma \subset \mathbb{P}^{2n-1}(\mathbb{R})$  est l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes sont toutes positives, et  $\Omega_G$  est la  $(2n-1)$ -forme différentielle  $\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_{2n}$ . Notons que l'intégrande de  $I_G$  est une forme différentielle définie sur  $\mathbb{P}Y_G$ , le lieu de non-annulation du polynôme homogène  $P_G$  dans  $\mathbb{P}^{2n-1}$ . Il est en général difficile de calculer explicitement le nombre réel  $I_G$ , mais il se trouve que dans des exemples où celui-ci est calculé, c'est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des nombres multizêtas (MZVs), qui sont des nombres réels définis, pour des entiers  $s_1 \geq 2$  et  $s_i \geq 1$ , par la série

$$\zeta(\underline{s}) = \zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \dots n_k^{s_k}}.$$

Une approche naturelle est d'interpréter le nombre réel  $I_G$  comme une **période** en géométrie algébrique, qui est donné par l'accouplement entre un élément de la cohomologie de de Rham et un élément de l'homologie de Betti. Via une construction par des éclatements (voir [Bloch-Esnault-Kreimer], Proposition 7.3), on peut définir le motif du graphe  $m_G$  comme un certain groupe de cohomologie relative en degré  $2n - 1$ , de sorte que le nombre  $I_G$  en est une période.

Une question qui se pose alors est de savoir si la structure de Hodge mixte relative sous-jacente de  $m_G$  est toujours de Tate mixte (i.e. n'a que des morceaux de type  $(p,p)$ ). <sup>19</sup> D'une part, par les conjectures standard sur les motifs de Tate mixtes, cette question est reliée au lien entre la période  $I_G$  et les MZVs. Et d'autre part, la philosophie derrière la Conjecture 1.4 sur la dénombrabilité polynomiale du schéma  $Y_G$  (ou de manière équivalente de  $\mathbb{P}Y_G$ ) provient de cette question, par la théorie des motifs de Tate mixtes.

Avec le Théorème 1.7, on sait que les fonctions  $|Y_G|$  sont assez génériques, ce qui permet de donner de l'information sur leurs cohomologies par la formule de trace de Lefschetz. Néanmoins cela ne suffit pas pour répondre à la question précédente. On espère en tout cas que l'étude d'un contre-exemple explicite de la Conjecture 1.4 pourra aider à mieux connaître la structure des motifs  $m_G$ .

## Remerciements

Je tiens à remercier Francis Brown pour m'avoir présenté ce vaste domaine de mathématiques vraiment intéressant. Je remercie Wenjie Fang pour des discussions sur plusieurs

18. "Wheel with  $n$  spokes" en anglais.

19. A titre d'exemple, d'après [Bloch-Esnault-Kreimer], la réponse est oui pour les roues à  $n$  rayons.

aspects de la combinatoire. Je remercie aussi Nicolas Mascot pour ses conseils précieux sur la présentation du texte.

### RÉFÉRENCES

- [André] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, Panoramas et Synthèses, **17**, Société Mathématique de France, Paris, 2004.
- [Belkale-Brosnan1] P. Belkale, P. Brosnan, *Incidence Schemes and a Conjecture of Kontsevich*, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany, preprint, 2000, <http://www.mpim-bonn.mpg.de/preblob/921>.
- [Belkale-Brosnan2] P. Belkale, P. Brosnan, *Matroids, motives and conjecture of Kontsevich*, Duke Math. J. **116**, no. 1 (2003), 147-188.
- [Bloch] S. Bloch, *Motives associated to sums of graphs*, in *The geometry of algebraic cycles*, 137-143, Clay Math. Proc., **9**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.
- [Bloch-Esnault-Kreimer] S. Bloch, H. Esnault, D. Kreimer, *On Motives Associated to Graph Polynomials*, Comm. Math. Phys. **267** (2006), no. 1, 181-225.
- [Bloch-Kriz] S. Bloch, I. Kriz, *Mixed Tate Motives*, The Annals of Mathematics Second Series, **140**, no. 3 (1994), 557-605.
- [Blunck-Havlicek] A. Blunck, H. Havlicek, *Projective representations. I. Projective lines over rings*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **70** (2000), 287-299.
- [Bokowski-Sturmfels] J. Bokowski, B. Sturmfels, *Computational Synthetic Geometry*, Lecture Notes in Math. **1355**, Springer, Berlin, 1989.
- [Brown] F. Brown, *On the periods of some Feynman integrals*, arXiv :0910.0114v2.
- [Brown-Schnetz] F. Brown, O. Schnetz, *A  $K3$  in  $\phi^4$* , à paraître dans Duke Math. Journal.
- [Chênevert] G. Chênevert, *Some remarks on Frobenius and Lefschetz in étale cohomology*, notes de Séminar on Cohomology Theories, <http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology.html>.
- [Deligne] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA  $4\frac{1}{2}$ . Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier. Lecture Notes in Mathematics **569**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [Deneff-Loeser] J. Deneff, F. Loeser, *Germes of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. Math. **135** (1999), 201-232.
- [Eisenbud] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry*, Grad. Texts in Math. **150**, Springer, New York, 1995.
- [Esnault-Viehweg] H. Esnault, E. Viehweg, *On a rationality question in the Grothendieck ring of varieties*, Acta Math. Vietnam. **35** no. 1 (2010), 31-41.
- [Fulton] W. Fulton, *Intersection theory*, Second edition, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **2**. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [Grothendieck] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de Jean Dieudonné) : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Seconde partie.*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, **17** (1963), 5-91.
- [Hartshorne] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [Hoskins] V. Hoskins, *Motivic Integration*, Year 4 Essay at The University of Warwick, [http://www.warwick.ac.uk/masdf/research/y4\\_hoskins.pdf](http://www.warwick.ac.uk/masdf/research/y4_hoskins.pdf).
- [Katz] N. Katz, *Review of  $l$ -adic cohomology*, in *Motives* (Seattle, WA, 1991), 21-30, Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

- [Kolhatkar] R. Kolhatkar, *Grassmann Varieties*, Master thesis, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montréal, 2004.
- [Lafforgue] L. Lafforgue, *Chirurgie Des Grassmanniennes*, Crm Monograph Series **19**, American Mathematical Society, 2003.
- [MacWilliams] J. MacWilliams, *Orthogonal matrices over finite fields*, Amer. Math. Monthly **76** (1969), 152-164.
- [McGlynn] G. McGlynn, *Representability of matroids*, <http://users.eecs.northwestern.edu/nickle/combOpt/>.
- [Milne] J. S. Milne, *Abelian varieties*, in *Arithmetic geometry* (Storrs, Conn., 1984), Springer, New York, 103-150.
- [Mnev] N.E. Mnëv, *The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties*, in *Topology and geometry-Rohlin Seminar*, 527-543, Lecture Notes in Math., **1346**, Springer, Berlin, 1988.
- [Nagata] M. Nagata, *Imbedding of an abstract variety in a complete variety*, J. Math. Kyoto Univ. **2** (1962), 1-10.
- [Nitsure] N. Nitsure, *Representability of Hom implies flatness*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **114** (2004), no. 1, 7-14.
- [Poonen] B. Poonen, *The Grothendieck ring of varieties is not a domain*, arXiv.org :math/0204306.
- [Quillen] D. Quillen, *Projective modules over polynomial rings*, Inventiones math. **36** (1976), 167-171.
- [Richter-Gebert] J. Richter-Gebert, *Mnev's universality theorem revisited*, Sémin. Lothar. Combin. **34** (1995).
- [Sahasrabudhe] N. Sahasrabudhe, *Grothendieck ring of varieties*, Master thesis à l'Université de Bordeaux 1, <http://www.algant.eu/documents/theses/neeraja.pdf>.
- [Stanley1] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics Volume 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [Stanley2] R. P. Stanley, *Spanning trees and a conjecture of Kontsevich*, Ann. Combin. **2** (1998), 351-363.
- [Stembridge] R. P. Stanley, *Counting Points on Varieties over Finite Fields. Related to a Conjecture of Kontsevich*, Ann. Combin. **2** (1998), 365-385.
- [TGF] *The Grothendieck Festschrift. Vol. II*, A collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck. Edité par P. Cartier, L. Illusie, N. M. Katz, G. Laumon, Yu. I. Manin and K. A. Ribet. Reprint of the 1990 original. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.
- [Whittle] G. Whittle, *On matroids representable over  $GF(3)$  and other fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 2, 579-603.