I GAGA定理：代数几何与解析几何

(复)代数簇：多项式函数的零点
(复)解析流形：全纯函数的零点

定义1 1) 设 $U \subset \mathbb{C}^n$ 为子拓扑空间

若 $\forall x \in U$，$\exists$ $\left|\begin{array}{l} x \in W \subset \mathbb{C}^n \text{ 开邻域} \\ f_1, \dots, f_k : W \to \mathbb{C} \text{ 全纯函数} \end{array}\right.$

s.t. $U \cap W = \{ z \in W \mid f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0 \}$

则称 U 是一个 $\mathbb{C}^n$ 的解析子空间

$\Longrightarrow$ $\left|\begin{array}{l} U \subset \mathbb{C}^n \text{ 局部闭集} \\ \mathcal{H}_U = U \text{ 上全纯函数层} \end{array}\right.$

2) 设 X 是 ~~Hausdorff~~ 分离 (Hausdorff / T_2) 拓扑空间，$\mathcal{H}_X = X$ 上的层

若存在 X 的开覆盖 (V_i) 使得 $\left|\begin{array}{l} (V_i, \mathcal{H}_X|_{V_i}) \text{ 同构于某个 } \mathbb{C}^n \text{ 的解析子空间} \\ V_i \cap V_j \text{ 上的转换函数是全纯的} \end{array}\right.$

则称 $(X, \mathcal{H}_X)$ 是一个(复)解析空间

$AnSp/\mathbb{C}$ = 解析空间范畴
态射 = 全纯映射

例 - $\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ = n维仿射空间

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \{\mathbb{C}^{n+1}$ 中所有1维子空间$\}$ = n维射影空间

$= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus (0, \dots, 0)\} \big/ (x_0 : \cdots : x_n) = (\lambda x_0 : \cdots : \lambda x_n)$

定义2 $Sch/\mathbb{C}$ = $\mathbb{C}$ 上分离有限型概形范畴 (cf. 代数几何课程)

态射 = 概形态射

全纯 $\longmapsto$ 多项式

$X\in Sch/\mathbb{C} \Rightarrow X(\mathbb{C})$上有Zariski拓扑：Zariski闭集都是解析闭集

但Z拓扑比解析拓扑更粗糙.

例 - $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})=\mathbb{C}$ 上的全纯函数比多项式函数多得多

- 但 $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$上的半纯函数都是有理分式

定理3 (周炜良定理) $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$的任一解析闭子集都是代数闭子集

定理4 $X\in Sch/\mathbb{C}$，则 $X(\mathbb{C})$有唯一的解析空间结构

使得任一Zariski开集上都是解析同构.

$\rightsquigarrow$ 解析化函子 $an: Sch/\mathbb{C} \longrightarrow AnSp/\mathbb{C}$

$$(X,\mathcal{O}_X)\longmapsto (X^{an}=X(\mathbb{C}),\ \mathcal{O}_{X^{an}}=\mathcal{H}_{X^{an}})$$

$$(X\to Y)\longmapsto (X^{an}\to Y^{an})$$

定义5 $(X,\mathcal{O}_X)$局部环空间，$\mathcal{F}\in Mod(\mathcal{O}_X)$

若$\forall U\subset X$开集，$\forall n\geq 0$，$\forall f: \mathcal{O}_{X|U}^{\oplus n}\longrightarrow \mathcal{F}_{|U}$

都有：$Ker(f)\in Mod(\mathcal{O}_{X|U})$是有限生成的

则称 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个凝聚层

$\rightsquigarrow$ $X\in Sch/\mathbb{C}$ $\quad Coh(X)=\mathcal{O}_X$上的凝聚层范畴

$\quad Coh(X^{an})=\mathcal{O}_{X^{an}}$ . . . — .

- an 诱导 $an_X: X^{an}\longrightarrow X$ 局部环空间的映射

引理 6 若 $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$，则 $an_X^* \mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X^{an})$

证明 只需证明 $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(\mathbb{C})^{an}} \in \mathrm{Coh}(X^{an})$

$\Uparrow$

$\mathbb{C}\{x_1, \cdots, x_k\} = \{$在原点某邻域上收敛的形式幂级数$\}$
是 Noether 环

$\Uparrow$

Weierstrass 预备定理 + Hilbert 基定理 + 归纳 □

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Coh}(X) \xrightarrow{(*)} \mathrm{Coh}(X^{an})$
$\mathcal{F} \longmapsto \mathcal{F}^{an} = an_X^* \mathcal{F}$

定理 7 (GAGA) $X \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ 闭子概形 (即 X 是射影概形)

则 $(*)$ 是范畴等价

具体而言： 1) $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}^{an}$ 有相同的上同调
2) $\mathcal{F}^{an}$ 和 $\mathcal{G}^{an}$ 之间的解析映射都是代数的
3) 解析凝聚层都是代数的

代数 $\longleftrightarrow$ 分析

注：对非射影 X 失效

(+平坦连络条件：Deligne 1970)

定理 8 (Grothendieck, Grauert-Remmert)

$X \in \mathrm{SmProj}/\mathbb{C}$ (光滑射影)，则 ~~存在一一对应~~

$\{Y \to X$ 有限平展覆盖$\}$ $\longrightarrow$ $\{W \to X^{an}$ (拓扑) 有限覆盖空间$\}$
(finite étale cover) (finite covering space)
$Y \longmapsto W = Y^{an}$

是满射

$Y \to X$ 平展态射 $\Leftrightarrow$ 局部 $A \to B = A[x]_{(g)}/(f)$

$\rightsquigarrow$ 平展基本群 $\pi_1^{et}(X, x)$

$f, g \in A[x]$，首 1，f' 在 B 中可逆

II. Weil猜想和平展上同调

概形的Zeta函数

<u>定义</u> $X/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 有限型 $|X|=\{X\text{的闭点}\}$.

$t\in\mathbb{C}$ $\zeta_X(t)=\prod_{x\in|X|}\frac{1}{1-N(x)^{-t}}$ = X的Zeta函数

$N(x)=x$的剩余域元素个数

ζ_X在$\{\operatorname{Re}(t)>\dim X\}$上内闭一致收敛

<u>例</u>. $X=\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ $\zeta_X(s)=\prod_{p\text{质数}}\frac{1}{1-p^{-s}}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ 黎曼Zeta函数

- 若 $q=p^n$ 质数幂, $X/\mathbb{F}_q$ 有限型, 则

$$\zeta_X(t)=\exp\left(\sum_{n\geq 1}\#X(\mathbb{F}_{q^n})\frac{t^n}{n}\right)$$

$\mathbb{F}_{q^n}$ = 有限域 $\#X(\mathbb{F}_{q^n})$ = X在$\mathbb{F}_{q^n}$上点的个数

<u>Weil猜想.</u> $X\in\operatorname{SmProj}/\mathbb{F}_q$ $\dim X=d$

(W1) (有理性) ζ_X是有理分式:

$$\zeta_X(t)=\frac{P_1(t)\cdots P_{2d-1}(t)}{P_0(t)P_2(t)\cdots P_{2d}(t)}\qquad P_i(t)\in\mathbb{Z}[t]$$

(W2) (函数方程) 记 $\beta_i=\deg P_i(t)\in\mathbb{Z}$

$$\chi=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\beta_i$$

则 $\zeta_X(q^{-d}t^{-1})=\pm q^{\frac{d\chi}{2}}t^{\chi}\zeta_X(t)$

(W3) (有限域上的黎曼猜想) $1\leq i\leq 2d-1$, 记 $P_i(t)=\prod_{j=1}^{\beta_i}(1-\alpha_{i,j}t)$ $\alpha_{i,j}\in\mathbb{C}$

则 $\alpha_{i,j}$ 为模长为 $q^{\frac{i}{2}}$ 的代数数

$\Longleftrightarrow$ $\#X(\mathbb{F}_{q^n})=q^{nd}+\sum_{i=0}^{2d-1}(-1)^i\sum_{j=1}^{\beta_i}\alpha_{i,j}^n$

(W4) 若 $\exists X_1 \in SmProj/\mathbb{C}$ 和 X 由相同的整系数多项式定义 (Betti 数)

则 $\beta_i = \dim_{\mathbb{Q}} H^i(X_1(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$

↑ 奇异 / Betti 上同调 (cf: 代数拓扑课程)

例 $X = \mathbb{P}^m_{\mathbb{F}_q}$ $\quad \zeta_{\mathbb{P}^m}(t) = \dfrac{1}{(1-t)(1-qt)\cdots(1-q^m t)}$

$\Leftrightarrow \# \mathbb{P}^m(\mathbb{F}_q) = 1 + q + \cdots + q^m$.

历史: - Hasse : X = 椭圆曲线

- Weil X = 任意曲线 (Hasse - Weil 上界: g = 亏格

$|\# X(\mathbb{F}_{q^n}) - 1 - q^n| \le 2g\, q^{\frac{n}{2}}$

- Dwork : (W1) : p进方法

- SGA 4-5 : (W2) (W4) : 平展上同调

- Deligne : (W3)

不动点公式 M = n维光滑紧复流形

$f: M \to M$ 连续映射, 只有简单孤立不动点

($\Leftrightarrow \Gamma_f \subset M \times M$ 与 Δ_M 横断)

则 $\# M^f = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \operatorname{Tr}(\phi : H^i(M, \mathbb{Q}))$

Weil 猜想 ⟿ 不动点公式 : $F: X \to X$ (几何) Frobenius 态射

(若 $x \in \overline{\mathbb{F}_q}$, 则 $x \in \mathbb{F}_{q^n} \Leftrightarrow x^{q^n} = x \Leftrightarrow (Fr)^n(x) = x$)

定义 10 k, K 域, $\operatorname{char} K = 0$, $H^*: (SmProj/k)^{op} \to Gr_{\mathbb{Z}} Vect_K$ (分次 K-线性空间)

满足

(0) H^* 和余积交换 ($\Leftrightarrow H^*(X \amalg Y) = H^*(X) \oplus H^*(Y)$)

1) $\forall\ X\in \mathrm{SmPrj}/k$, $\dim H^i(X)<\infty$

$\dim X=d$ 且 $i\notin[0,2d] \Rightarrow H^i(X)=0$.

2) $H^0(\operatorname{Spec} k)=K$

3) 若记 $K(-1)=H^2(\mathbb{P}^1_k)$, 则 $\dim K(-1)=1$

4) (Künneth 公式) $H^*(X)\otimes H^*(Y)\simeq H^*(X\times Y)$

分次交换性

5) $X\in \mathrm{SmPrj}/k$, $\dim X=d$

$\exists\ \mathrm{Tr}_X: H^{2d}(X)\to K(-d)=K(-1)^{\otimes d}$ 迹映射

使得 $H^i(X)\otimes H^{2d-i}(X)\longrightarrow H^{2d}(X\times X)\xrightarrow{\delta_X^*} H^{2d}(X)\xrightarrow{\mathrm{Tr}_X} K(-d)$

呈非退化配对

6) $\exists\ \mathrm{cl}: CH^i(X)\longrightarrow H^{2i}(X)(i)=\mathrm{Hom}_K(K(-i),H^{2i}(X))$

周(代数)环　　和推出，拉回和外积兼容

则称 H^* 是 k 上系数为 K 的一个 <u>Weil上同调</u>

<u>例</u>　$k\subset\mathbb{C}$　$H_B^*(X)=H^*(X(\mathbb{C}),\mathbb{Q})$　Betti/奇异上同调

$H_{dR}^*(X)=H^*(X,\Omega^*_{X/k})$　de Rham 上同调

$H_{dR}\simeq H_B\otimes_{\mathbb{Q}} k$　(de Rham 定理)

<u>定理11</u> 若 $\mathbb{F}_q$ 上存在一个 Weil 上同调 $(+\varepsilon)$, 则 (W1), (W2), (W4) 成立

且 $P_i(t)=\det(1-\mathrm{Fr}\cdot t\mid H^i(X))$

$\beta_i=\dim_K H^i(X)$

<u>问题</u>: 如何构造?

注 1) (Serre) 若 $\mathrm{char}\, k = p > 0$，则不能取 $K = \mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$

2) 凝聚层上同调 不满足条件：

<u>定理 12</u> $X \in \mathrm{Aff}/k$ 仿射概形，$\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$

则 $\forall i > 0$，$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$

(层上同调 或 Čech 上同调)

3) 周群 $CH^i(X) = \{X\text{上余维 } i \text{ 的代数闭链}\}/\text{有理等价}$

$$= \mathrm{coker}\left(\bigoplus_{x \in X^{(i-1)}} k(x)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \bigoplus_{x \in X^{(i)}} \mathbb{Z} \right)$$

有相交理论，但太大.

<u>平展上同调</u>

出发点： 1) (Weil) A/k Abel 簇 $\rightsquigarrow$ Tate 模 $\quad \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$

$$T_\ell(A) = \varprojlim_n A(\bar{k})[\ell^n] \in \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}_\ell)$$

$\rightsquigarrow$ Galois 上同调

2) π_1^{et} 与有限平展复叠 (类比 H^*_B)

$\rightsquigarrow$ Grothendieck 拓扑 (平展拓扑) $\rightsquigarrow$ 上同调

拓扑空间的推广：

- 开集，邻域，开覆盖，层，层的上同调 (导出函子)
- 闭集，闭包，补集 无定义

$\rightsquigarrow$ Topos 理论

<u>定理 13</u> $\mathrm{char}\, k = p \geq 0$ $\quad \ell \neq p$ 素数 $\quad$ <u>ℓ进上同调</u>

$$H^*: (\mathrm{SmProj}/k)^{op} \longrightarrow \mathrm{Gr}\,\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_\ell}$$

平展上同调

$$X \longmapsto H^i_\ell(X) = \varprojlim H^i_{et}(X_{\bar{k}}, \mathbb{Z}/\ell^n) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \mathbb{Q}_\ell$$

$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$

是系数为 $\mathbb{Q}_\ell$ 的 Weil 上同调

若 $k \subset \mathbb{C}$，则 $H^i_\ell(X) \simeq H^i_B(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ (Artin)

$$\pi_1^{et} \text{ 作用} \begin{cases} \longrightarrow \text{Galois 作用} \\ \longrightarrow \text{(拓扑)单值作用} \end{cases}$$

(W3) 与标准猜想.

$X \in SmProj/k \quad \dim X = d \quad H^i = H^i_\ell$

$L \subset X$ 超平面截面 $\quad \xi = [L] \in H^2(X)(1)$

强 Lefschetz 定理 (Deligne): $H^i(X) \xrightarrow[\sim]{\cup \xi^{d-i}} H^{2d-i}(X)(d-i)$

- Lefschetz 类型标准猜想 $(B(X))$: $*_{L,X} = \left(\begin{cases} \cup \xi^{d-i} & i \le d \\ (\cup \xi^{i-d})^{-1} & i \ge d \end{cases} \right) \in End(H^*(X))$

则 $*_{L,X}$ 是代数的, 即 $\exists\, \alpha \in CH^*(X \times X)$ 使得 $cl(\alpha) = *_{L,X}$

- Hodge 类型标准猜想 $(Hdg(X))$:

$$C^j(X) := Ker\left(H^{2j}(X)(j) \xrightarrow{\cup \xi^{d-2j+1}} H^{2d-2j+2}(X)(d-j+1) \right)$$
$$\cap\, Im\left(CH^j(X) \xrightarrow{cl} H^{2j}(X)(j) \right)$$

则对称双线性形式
$$C^j(X) \times C^j(X) \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$(x, y) \longmapsto (-1)^j\, Tr\,(x \cup y \cup \xi^{d-2j})$$

是正定的

注: $char\, k = 0$, $\quad Hdg(X) \Leftarrow$ Hodge 指标定理

$B(X) \Leftarrow$ Hodge 猜想.

一般情形下困难

定理 14 $\quad B(X) + Hdg(X) \Rightarrow (W3)$

$$\Rightarrow \forall\, \alpha \in CH^i(X),\quad cl(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \forall \beta \in CH^{d-i}(X),\ \alpha \cdot \beta = 0$$
$$(\Leftrightarrow \alpha \overset{num}{\sim} 0)$$

注: (W3) 由 Deligne ~~证明~~ 用其他方法证明

- Lefschetz 束的单值
- 权重理论